ELEMENTO DE VOLUMEN EN FIFERENTES SISTEMAS DE COORDENADAS

En cualquier sistema ortogonal de coordenadas q_1, q_2, q_3 el cuadrado del elemento de longitud se expresa por la fórmula

$$dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2,$$

y el elemento de volumen por la fórmula

$$dV = h_1 h_2 h_3 \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3,$$

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

son funciones de coordenadas y se denominan factores de escala. Algunas operaciones diferenciales se escriben de la siguiente manera:

$$(\text{grad } \varphi)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i};$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right];$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} & \frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_3} & \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right].$$

En la fórmula para el *rot* **A**, los operadores diferenciales $\partial/\partial q_i$ actúan sobre los elementos de la fila inferior del determinante.

En el sistema de coordenadas esféricas:

$$
\left.\begin{aligned}
&x = r\sin\vartheta\cos\alpha,\quad y = r\sin\vartheta\sin\alpha,\quad z = r\cos\vartheta;\\
&h_r = 1,\quad h_\vartheta = r,\quad h_\alpha = r\sin\vartheta;\\
&\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\vartheta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} + \frac{\mathbf{e}_\alpha}{r\sin\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha};\\
&\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\vartheta\sin\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha};\\
&(\operatorname{rot}\mathbf{A})_r = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\alpha\sin\vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\alpha}\right];\\
&(\operatorname{rot}\mathbf{A})_\vartheta = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\alpha)}{\partial r};\\
&(\operatorname{rot}\mathbf{A})_\alpha = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta};\\
&\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}.
\end{aligned}\right\}
$$

En el sistema de coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\alpha,\qquad y = sen\,\alpha,\qquad z = z$$

$$h_r = 1,\qquad h_\alpha = r,\qquad h_z = 1$$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\alpha}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \mathbf{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z};\\
&\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z};\\
&(\operatorname{rot}\mathbf{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z};\quad (\operatorname{rot}\mathbf{A})_\alpha = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r};\\
&(\operatorname{rot}\mathbf{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha};\\
&\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.
\end{aligned}
$$

Para cualesquiera **A** tienen lugar las igualdades:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \equiv 0,\quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} \equiv 0,\quad \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi \equiv \Delta\varphi.$$

Los siguientes teoremas integrales fundamentales permiten transformar integrales de volumen, de superficie y de línea entre sí.

Teorema de Gauss - Ostrograsdsky:

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{A}\,dV = \oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S},$$

donde *V*— cierto volumen, S — superficie cerrada que limita dicho volumen.

T e o r e m a d e S t o k e s :

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S},$$

donde *I* — circuito cerrado, S — cualquier superficie que se apoya en dicho circuito. El vector A debe ser una función diferenciable de coordenadas.