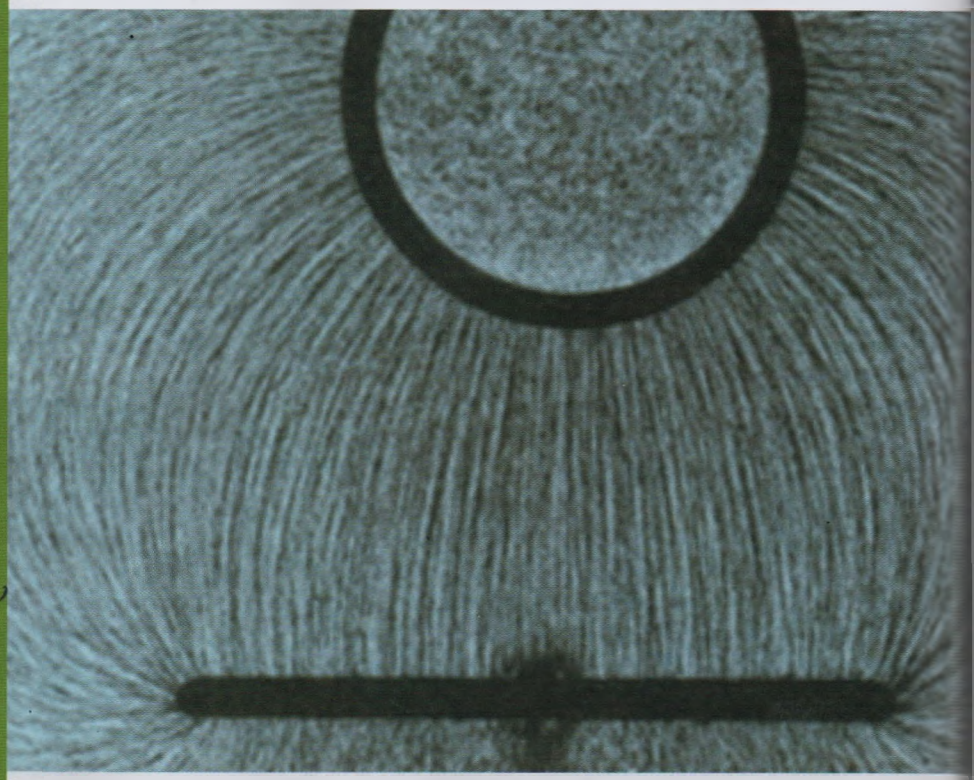
CAPÍTULO

# 24

# La ley de Gauss



## CONCEPTOS EN CONTEXTO

Esta fotografía ilustra trocitos de hilo dispersos en aceite para revelar la configuración del campo eléctrico generado por las cargas eléctricas contenidas en dos conductores paralelos. Los trocitos de hilo funcionan como dipolos eléctricos, que tienden a alinearse con el campo eléctrico local. La distribución de cargas en esta fotografía es muy simétrica y, por consiguiente, la distribución del campo eléctrico es simétrica.

Puede aprovecharse la simetría para facilitar el cálculo de campos eléctricos, lo que permitirá contestar las siguientes preguntas:

? ¿Cuál es el campo eléctrico debido a una distribución de carga con simetría esférica? (Ejemplos 4 y 5, páginas 764-766)

? ¿Cuál es el campo eléctrico cerca de una lámina delgada y plana de carga, o cerca de una losa conductora plana? (Ejemplos 9 y 11, páginas 770 y 775)

? ¿Cuál es el campo eléctrico dentro de un conductor en equilibrio electrostático y qué revela acerca de la distribución de cargas en el conductor? (Sección 24.5, página 774 y ejemplo 12, página 776)


24.1 El flujo eléctrico

24.2 La ley de Gauss

24.3 Aplicaciones de la ley de Gauss

24.4 Superposición de campos eléctricos

24.5 Conductores y campos eléctricos

El campo eléctrico de cualquier distribución de carga se puede calcular aplicando la ley de Coulomb, como en los ejemplos del capítulo anterior. El cálculo es bastante sencillo si la distribución de cargas sólo se compone de la distribución de algunas cargas puntuales. Pero, como se vio en la sección 23.2, este método se complica con frecuencia, y es tedioso si la carga se distribuye en una superficie o volumen, casos en los que hay que hacer una difícil suma o integración de todos los vectores campo eléctrico individuales, de las pequeñas entidades de la distribución de cargas. Por fortuna hay otro método para calcular el campo eléctrico; éste se basa en un teorema llamado ley de Gauss. Esa ley se deriva de la ley de Coulomb, por lo que no es un tema físico nuevo. Sin embargo, sí contiene algunos nuevos métodos matemáticos, que proporcionan un buen atajo para calcular el campo eléctrico cuando la distribución de cargas tiene un alto grado de simetría. Eso quiere decir que, si bien la ley de Gauss siempre es válida, no facilita todos los cálculos; pero cuando lo hace, el resultado es asombroso.

En este capítulo se expondrá primero el concepto de flujo eléctrico; a continuación se presentará la ley de Gauss y se indicará la forma en que facilita en muchos casos la determinación del campo eléctrico. También se describirá cómo se puede distribuir la carga en metales y aislantes, y cómo ese conocimiento de las distribuciones permitidas de carga ayuda a aplicar la ley de Gauss.

# 24.1 EL FLUJO ELÉCTRICO

Considérese una superficie matemática con la forma de un rectángulo de área $A$. Supóngase que esa superficie está sumergida en un campo eléctrico constante $\mathbf{E}$ (véase la figura 24.1*a*). Ese campo eléctrico forma cierto ángulo con la superficie; el vector campo eléctrico tiene un componente tangencial, es decir, paralelo a la superficie, y un componente normal, o perpendicular, a ella. El **flujo eléctrico** $\Phi_E$ *que atraviesa la superficie se define como el producto del área A por el componente normal del campo eléctrico.* Si a ese componente normal del campo eléctrico se le representa con $E_\perp$, el flujo eléctrico es

$$\Phi_E = E_\perp A \tag{24.1}$$

La unidad SI del flujo eléctrico es la unidad de campo eléctrico por la unidad de área; esto es, $(\mathrm{N/C})\cdot\mathrm{m}^2$, o $\mathrm{N\cdot m^2/C}$.

El componente normal $E_\perp$ también se puede expresar en la forma $E\cos\theta$, siendo $\theta$ el ángulo entre $\mathbf{E}$ y una perpendicular a la superficie (véase la figura 24.1*a*). Con esta ecuación para $E_\perp$, la ecuación (24.1) se transforma en:

$$\Phi_E = EA\cos\theta \tag{24.2}$$

**flujo eléctrico $\Phi_E$**

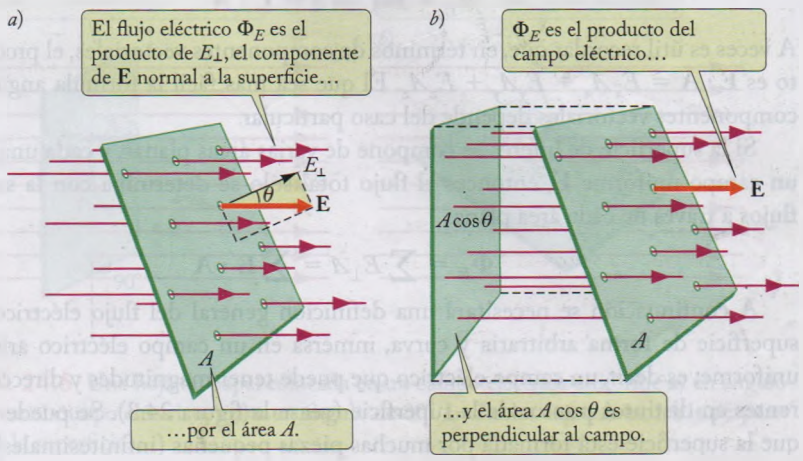



**FIGURA 24.1** *a*) Superficie rectangular plana inmersa en un campo eléctrico uniforme. La perpendicular a la superficie forma el ángulo $\theta$ con las líneas de campo. El componente normal del campo eléctrico es $E_\perp = E\cos\theta$. El flujo eléctrico es $\Phi = E_\perp A$. En términos de líneas de campo, el flujo eléctrico es proporcional a la cantidad de líneas interceptadas por el área. *b*) El área $A\cos\theta$ es la proyección del área $A$ en un plano perpendicular al campo eléctrico.

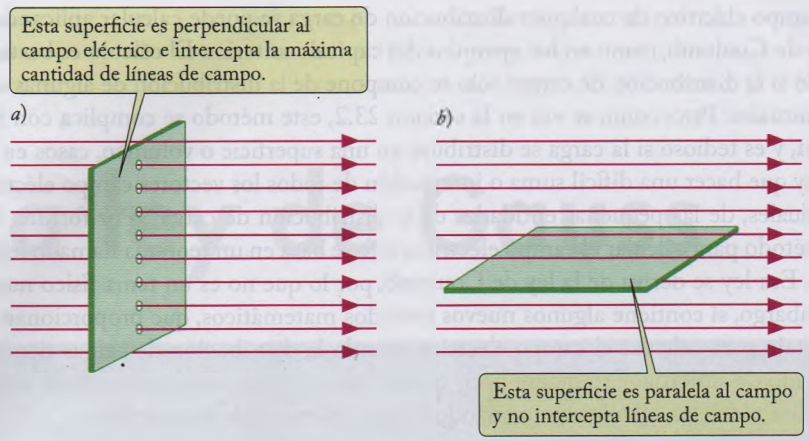



**FIGURA 24.2** *a*) Una superficie de área $A$ es perpendicular a las líneas de campo eléctrico. Intercepta un flujo eléctrico $\Phi = EA$. *b*) La superficie es paralela a las líneas de campo. No intercepta el flujo eléctrico.

Se puede interpretar el producto $A \cos \theta$ como la proyección del área $A$ sobre un plano perpendicular al campo eléctrico; esto es, se puede considerar que $A \cos \theta$ es la parte del área que, en forma efectiva, da cara al campo eléctrico, como se ve en la figura 24.1*b*. Así, la ecuación (24.2) indica también que el flujo es la magnitud $E$ del campo eléctrico multiplicada por el área perpendicular al campo eléctrico. Si se piensa en términos de las líneas de campo presentadas en la sección 23.3, el flujo eléctrico que atraviesa un área $A$ es proporcional a la cantidad de líneas de campo interceptadas por esa área.

Se observa que si $\theta = 0$, el flujo es tan sólo $\Phi_E = EA$; en este caso, el área $A$ encara directamente al campo eléctrico, e intercepta la cantidad máxima de líneas de campo (véase la figura 24.2*a*). Por otro lado, si $\theta = 90°$, el flujo indicado en la ecuación (24.2) es cero; en ese caso, el área $A$ es paralela al campo eléctrico, y todas las líneas de campo rozan el área sin cruzarla (véase la figura 24.2*b*). Esta dependencia entre el flujo, o la cantidad interceptada de líneas de campo, y el ángulo de orientación del área, se puede comprender con una analogía sencilla: considérese que las líneas de campo eléctrico son análogas a las trayectorias de gotas de lluvia que caen y que el área es una hoja de papel. El flujo es la trayectoria de las gotas de lluvia que intercepta el papel (*flujo* viene de la palabra latina que significa fluir). Si se mantiene el papel de cara a la lluvia, interceptará una cantidad máxima de gotas; si se mantiene paralelo a la lluvia, no interceptará gotas. En ángulos intermedios la cantidad de gotas será proporcional a $\cos \theta$, como en la ecuación (24.2).

La ecuación (24.1) equivale matemáticamente al producto punto o producto escalar de dos vectores: el vector campo eléctrico $\mathbf{E}$ y el "vector área" $\mathbf{A}$. El vector $\mathbf{A}$ se define con magnitud igual al área $A$ ordinaria de la superficie, y su dirección es perpendicular a la superficie, esto es, $\mathbf{A} = A\,\hat{\mathbf{n}}$, siendo $\hat{\mathbf{n}}$ un vector unitario normal (perpendicular). Con esta definición, el flujo eléctrico es

$$\Phi_E = EA \cos \theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} \tag{24.3}$$

A veces es útil recordar que, en términos de componentes vectoriales, el producto punto es $\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = E_x A_x + E_y A_y + E_z A_z$. El que sea más fácil la fórmula angular o la de componentes vectoriales depende del caso particular.

Si la superficie de interés se compone de varias áreas planas, y cada una intercepta un campo uniforme $\mathbf{E}$, entonces el flujo total sólo se determina con la suma de los flujos a través de cada área plana:

$$\Phi_E = \sum E_{\perp} A = \sum \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} \tag{24.4}$$

A continuación se necesitará una definición general del flujo eléctrico para una superficie de forma arbitraria y curva, inmersa en un campo eléctrico arbitrario, no uniforme; es decir, un campo eléctrico que puede tener magnitudes y direcciones diferentes en distintos puntos de la superficie (véase la figura 24.3). Se puede considerar que la superficie está formada por muchas piezas pequeñas (infinitesimales). Para una

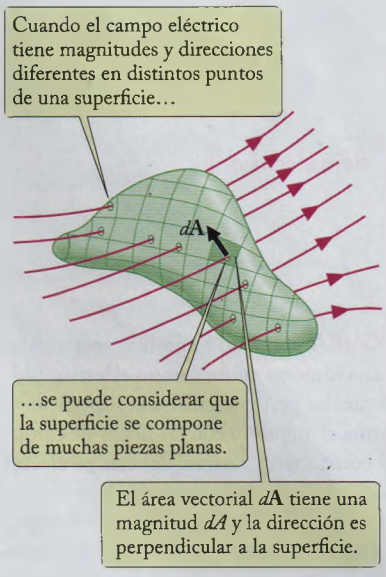



**FIGURA 24.3** Una superficie arbitraria inmersa en un campo eléctrico arbitrario, no uniforme.

pieza pequeña cuyo vector área es $d\mathbf{A}$, en un campo eléctrico $\mathbf{E}$, la contribución al flujo eléctrico es $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$. Si se determina la suma, o integral, de todas estas pequeñas cantidades de flujo eléctrico para todas las pequeñas piezas de superficie, se obtendrá el flujo eléctrico que atraviesa toda la superficie,

$$\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int E_\perp \, dA \tag{24.5}$$

donde nuevamente $E_\perp$ es el componente de $\mathbf{E}$ perpendicular a la superficie.

Tómese en cuenta que el flujo eléctrico es proporcional a la cantidad de líneas de campo interceptadas por la superficie. Se observa que, mientras que las líneas que atraviesan la superficie desde un lado son contribuciones positivas al flujo, las líneas que lo atraviesan desde el otro lado son contribuciones negativas (véase un ejemplo en la figura 24.4). Sin embargo, para las superficies *abiertas* que se han considerado hasta ahora, la dirección de referencia (la cara para la cual el flujo hacia fuera es positivo) se puede elegir de cualquiera de las dos maneras.

La definición de flujo también es válida para una superficie *cerrada*, como la de una esfera o la de un cubo. El flujo eléctrico que atraviesa esa superficie es

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint E_\perp \, dA \tag{24.6}$$

En ella, el círculo en el signo integral sólo indica que se trata de una superficie cerrada. Para el caso de superficies cerradas hay una convención de signos: *el componente normal $E_\perp$ se define como positivo si la dirección del campo eléctrico* $\mathbf{E}$ *es hacia afuera de la superficie, y es negativo si la dirección* es *hacia adentro, entrando a la superficie.* Así, el flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada es proporcional a la cantidad *neta* de líneas que salen de la superficie. El flujo eléctrico será positivo o negativo, dependiendo de si hay más líneas de campo que salen de la superficie o que entran en ella.

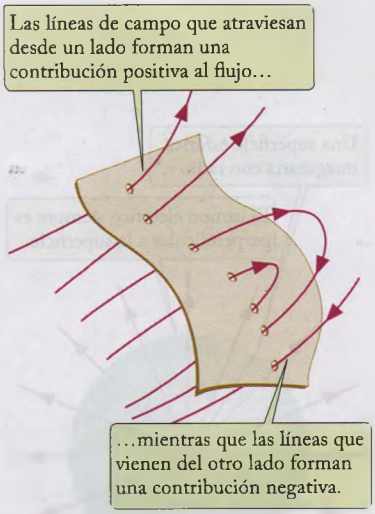



**FIGURA 24.4** Superficie arbitraria inmersa en un campo eléctrico arbitrario no uniforme. Aunque hay siete líneas que cruzan la superficie, cuatro tienen una dirección y tres la dirección contraria; entonces el flujo neto que atraviesa la superficie es la séptima parte del flujo que habría si todas las líneas de campo cruzaran en la misma dirección.

**EJEMPLO 1**

Una hoja plana de papel, que mide 22 cm × 28 cm, se coloca dentro de un campo eléctrico uniforme de 100 N/C. ¿Cuál es el flujo que atraviesa el papel, si la hoja forma un ángulo de 90° con el campo eléctrico? ¿Y si forma un ángulo de 30°? (Véase la figura 24.5.)

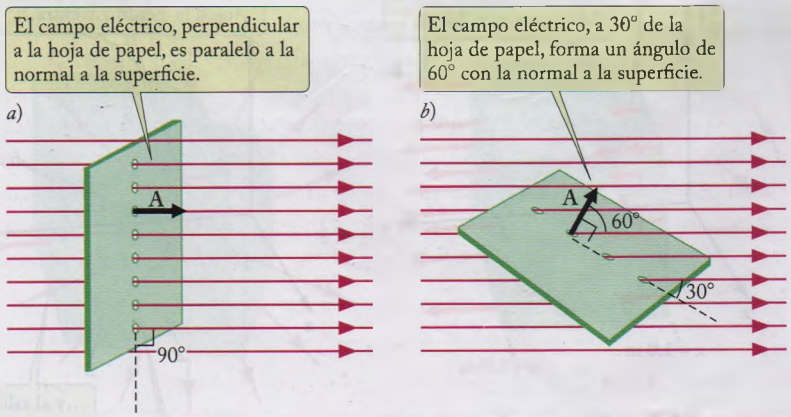



**FIGURA 24.5** Una hoja de papel colocada en un campo eléctrico uniforme *a)* en ángulo de 90° con el campo eléctrico, y *b)* a un ángulo de 30°. La flecha negra $\mathbf{A}$ indica la perpendicular a la superficie.

**SOLUCIÓN:** Para un campo eléctrico y un área plana, el flujo es tan sólo el producto $\Phi_E = EA\cos\theta$, y como un ángulo de 90° entre la hoja de papel y el campo eléctrico equivale a $\theta = 0$ en la ecuación (24.2) (véase la figura 24.5*a*),

$$\Phi_E = EA\cos\theta = (100\ \text{N/C}) \times (0.22\ \text{m} \times 0.28\ \text{m}) \times 1 = 6.2\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

Un ángulo de 30° entre el papel y el campo eléctrico equivale a que $\theta = 60°$ (véase la figura 24.5*b*), así que

$$\Phi_E = EA\cos\theta = (100\ \text{N/C}) \times (0.22\ \text{m} \times 0.28\ \text{m}) \times \cos 60° = 3.1\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

**FIGURA 24.6** Una superficie esférica con una carga puntual $q$ en su centro.

**EJEMPLO 2** Una esfera imaginaria de radio $r$ que tiene una carga positiva $q$ en su centro (véase la figura 24.6). ¿Qué flujo eléctrico produce el campo eléctrico de esa carga puntual en la superficie de la esfera?

**SOLUCIÓN:** La carga puntual positiva $q$ produce un campo eléctrico radial, hacia afuera, de magnitud $E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ que cruza a la superficie esférica siempre en dirección perpendicular. El área de esa esfera es $4\pi r^2$, así que

$$\Phi_E = EA\cos\theta = EA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad (24.7)$$

**COMENTARIO:** En la siguiente sección se verá que este sencillo resultado en general es cierto; a decir verdad, el resultado $\Phi_E = q/\epsilon_0$ se podría haber obtenido para *cualquier* superficie que encierre la carga $q$, y para *cualquier* modo en que se distribuya la carga encerrada $q$. Pero en este ejemplo se ve, en forma explícita y sencilla, cómo el resultado se debe a la naturaleza de inverso del cuadrado del campo eléctrico, que se simplifica exactamente con el área $4\pi r^2$.

**EJEMPLO 3** Un cubo de lado $a = 2.0$ m tiene un vértice en $(x, y, z) = (1.0\ \text{m}, 0, 0)$, y sus lados son paralelos a los ejes coordenados, como muestra la figura 24.7*a*. El cubo está en una región donde el campo eléctrico

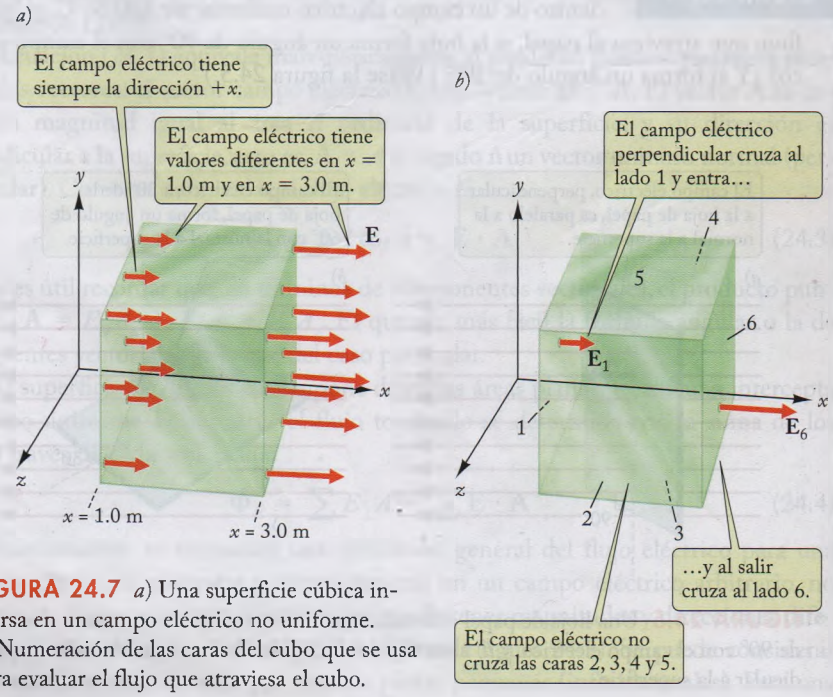



**FIGURA 24.7** *a*) Una superficie cúbica inmersa en un campo eléctrico no uniforme. *b*) Numeración de las caras del cubo que se usa para evaluar el flujo que atraviesa el cubo.

tiene siempre la dirección $+x$. La magnitud de este campo eléctrico varía sólo en función de $x$, y tiene los valores $E_x = 5.0$ N/C en $x = 1.0$ m, y $E_x = 15$ N/C en $x = 3.0$ m. ¿Cuál es el flujo eléctrico que atraviesa el cubo?

**SOLUCIÓN:** El flujo total es la suma de los flujos que atraviesan las caras individuales del cubo. Las caras del cubo se identifican del 1 al 6, como en la figura 24.7*b*. El área de cada cara es $A = a^2 = (2.0\text{ m})^2 = 4.0\text{ m}^2$. Nótese que para los lados 2, 3, 4 y 5, el campo pasa de largo por las superficies sin cruzarlas. Así,

$$\begin{aligned}\Phi_E = \oint E_\perp\, dA &= \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6} \\ &= \Phi_{E1} + 0 + 0 + 0 + 0 + \Phi_{E6} \\ &= (E_\perp A)_1 + (E_\perp A)_6\end{aligned} \tag{24.8}$$

Como la dirección de **E** en la cara 1 del cubo es hacia dentro, el flujo para esa cara es negativo, mientras que el flujo en la cara 6 es positivo. También, el campo eléctrico es perpendicular a las dos áreas, por lo que el flujo neto que atraviesa el cubo es

$$\Phi_E = -(5.0\text{ N/C}) \times (4.0\text{ m}^2) + (15\text{ N/C}) \times (4.0\text{ m}^2) = 40\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C} \tag{24.9}$$

## Revisión 24.1

**PREGUNTA 1:** Véase la figura 24.1*a*. Para la superficie cuya orientación muestra la figura, el flujo tiene un valor particular. ¿Sería mayor o menor si la superficie fuera horizontal? ¿Vertical?

**PREGUNTA 2:** ¿Cambiaría la respuesta en el ejemplo 2 si en lugar de la superficie esférica se tuviera la misma carga dentro de un cubo, como en la figura 24.8? ¿Y dentro de un cilindro?

**PREGUNTA 3:** Examínese la carga puntual y la superficie de la figura 24.9. El flujo neto que atraviesa esa superficie es

(A) Positivo (B) Negativo (C) Cero

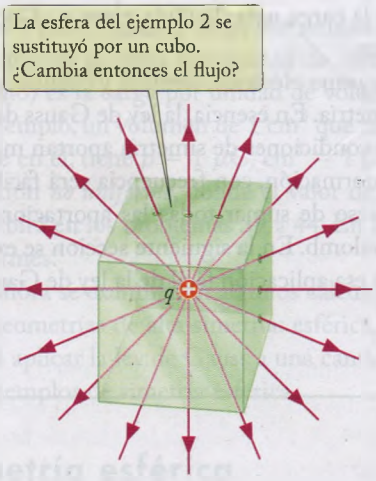



**FIGURA 24.8** Una superficie cúbica que encierra una carga puntual $q$.

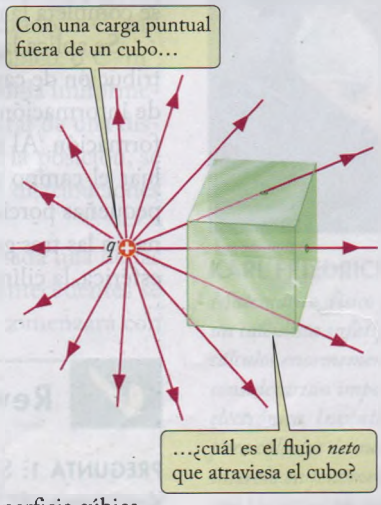



**FIGURA 24.9** Una superficie cúbica adyacente a una carga puntual $q$.

# 24.2 LA LEY DE GAUSS

En el ejemplo 2 se vio que una carga puntual $q$ encerrada en una superficie produce un flujo eléctrico $\Phi_E = q/\epsilon_0$ a través de la superficie. Este resultado se puede generalizar para una distribución arbitraria de carga, encerrada por una superficie arbitraria. El resultado general se llama **ley de Gauss**:

*Si una superficie cerrada arbitraria tiene una carga eléctrica neta $Q_{\text{interna}}$ dentro de ella, el flujo eléctrico a través de la superficie es $Q_{\text{interna}}/\epsilon_0$, es decir,*

ley de Gauss

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} \quad \text{o} \quad \Phi_E = \oint E_\perp \, dA = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} \tag{24.10}$$

superficie de Gauss

La ley de Gauss indica que el flujo eléctrico *total* que atraviesa *cualquier* superficie cerrada sólo se determina por la cantidad de carga dentro de la superficie. La superficie se llama **superficie de Gauss** o superficie gaussiana, y puede ser real, pero con frecuencia es una superficie imaginaria en el espacio que se escoge pasando por algún punto de interés. En general, como en las figuras 24.8 y 24.9, una carga dentro de la superficie genera un flujo neto que la atraviesa, mientras que cualquier carga fuera de la superficie hace una aportación cero al flujo neto a través de ella.

La demostración de la ley de Gauss es fácil si se aprovecha el concepto de líneas de campo. El campo eléctrico que aparece en la ecuación (24.10) es la suma de los campos eléctricos individuales de las cargas puntuales, algunas *afuera* de la superficie cerrada, y otras dentro de ella. El campo eléctrico individual de una carga fuera de la superficie cerrada no genera flujo neto a través de dicha superficie; cualquiera de las líneas de campo, o no toca la superficie, o bien entra en ella por un punto y sale de ella por otro. En cualquiera de los casos no hace aportación neta al flujo. Sin embargo, el campo eléctrico individual de una carga puntual dentro de la superficie sí contribuye al flujo. Por ejemplo, una carga puntual positiva $q$ tiene varias líneas de campo que salen, y la cantidad es proporcional a la carga $q$; todas ellas atraviesan la superficie cerrada, y entonces esa carga aporta un flujo proporcional a $q$. Se vio, en el ejemplo 2, que la constante de proporcionalidad entre un flujo y la carga que lo produce es $1/\epsilon_0$. Teniendo en cuenta que las cargas positivas generan flujo positivo y que las cargas negativas producen flujo negativo, se ve que el flujo neto, proporcional a la cantidad neta de líneas de campo que atraviesan la superficie, es igual a la carga neta dividida entre $\epsilon_0$. Con esto se completa la demostración de la ley de Gauss.

Se aplica la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico, siempre y cuando la distribución de cargas tenga un alto grado de simetría. En esencia, la ley de Gauss da algo de información sobre el campo eléctrico. Las condiciones de simetría aportan más información. Al combinar esas dos clases de información, con frecuencia será fácil evaluar el campo eléctrico, sin el laborioso proceso de sumar todas las aportaciones de pequeñas porciones de carga con la ley de Coulomb. En la siguiente sección se examinarán las tres geometrías en las que es posible esa aplicación fácil de la ley de Gauss: la esférica, la cilíndrica y la plana.

## ✔ Revisión 24.2

**PREGUNTA 1:** Si una superficie cerrada tiene flujo cero que la atraviesa ¿qué se puede decir acerca de la carga eléctrica en el interior de la superficie? ¿Y si la superficie no está totalmente cerrada (por tener un agujero)?

**PREGUNTA 2:** Véase la superficie cerrada que rodea las dos cargas de la figura 24.10. ¿Cuál es el flujo que atraviesa esa superficie?

**PREGUNTA 3:** ¿Cuál es la carga encerrada por el cubo del ejemplo 3?

**PREGUNTA 4:** Una esfera de radio $R$ está en una región de campo eléctrico uniforme $E$. El flujo neto a través de la superficie de la esfera es

(A) $E \times \pi R^2$ (B) $E \times 2\pi R^2$ (C) $E \times 4\pi R^2$ (D) $E \times \frac{4}{3}\pi R^3$ (E) Cero

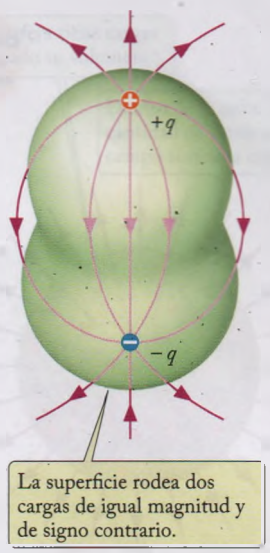



**FIGURA 24.10** Líneas de campo generadas por cargas positiva y negativa de igual magnitud.

# 24.3 APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS

Con la ley de Gauss se relacionan el componente normal $E_\perp$ del campo eléctrico en una superficie cerrada, y la carga total dentro de la superficie. Para aplicar la ley de Gauss a cada una de las tres geometrías de alta simetría (esférica, cilíndrica y plana) primero se debe elegir una superficie esférica o cilíndrica para la cual el flujo en el lado izquierdo de la ecuación de la ley de Gauss se pueda formular como el producto simple $EA$, siendo $E$ el campo eléctrico en un punto de interés y $A$ un área conocida que contiene ese punto. A continuación habrá que calcular $Q_{\text{interna}}$, la carga dentro de la superficie. Por último se podrá igualar el flujo $EA$ con $Q_{\text{interna}}/\epsilon_0$ y despejar la cantidad que se busca (que generalmente es $E$). Para ver cómo se calcula $Q_{\text{interna}}$ para la superficie, véase unas formas útiles de cuantificar la forma en que se puede distribuir la carga.

Desde el punto de vista macroscópico, la pequeñez de cada carga elemental equivale a que las distribuciones de carga se puedan considerar como *continuas* (hasta 1 $\mu$C contiene varios billones de cargas elementales). Ya se vieron dos clases de distribuciones de carga en el capítulo anterior: una lineal de carga y una de carga en superficie. En los ejemplos que siguen también se encontrará una tercera clase, una distribución de carga en volumen. Asimismo, en los casos de interés inmediato se supondrá que la distribución es *uniforme*, es decir, constante, dentro de una región especificada. Para una distribución uniforme, la carga $q$ en una línea de longitud $L$, o en una superficie de área $A$, o en un volumen $V$, es proporcional a la longitud, el área o el volumen, respectivamente:

$$\begin{aligned} &\text{Línea:} && q = \lambda L \\ &\text{Superficie:} && q = \sigma A \\ &\text{Volumen:} && q = \rho V \end{aligned} \tag{24.11}$$

donde $\lambda$ (lambda) es la carga por unidad de longitud, en coulombs por metro, o C/m; $\sigma$ (sigma) es la carga por unidad de área, en coulombs por metro cuadrado, o C/m$^2$, y $\rho$ (rho) es la carga por unidad de volumen en coulombs por metro cúbico, o C/m$^3$. Por ejemplo, un volumen de 1 cm$^3$ que tiene una carga de 1 $\mu$C distribuida uniformemente en él, tiene $\rho = 1\ \mu\text{C/cm}^3 = 1\ \text{C/m}^3$. La posibilidad más general de una distribución *no uniforme*, donde el valor de $\rho$ puede variar en función de la posición, se describirá en los problemas 39 a 44. En los ejemplos sólo se hablará de distribuciones uniformes.

Ahora se examinarán algunos cálculos del campo eléctrico **E** para cada una de las tres geometrías de alta simetría: esférica, cilíndrica y plana; con estos antecedentes se podrá aplicar la ley de Gauss a una cantidad enorme de problemas. Se comenzará con dos ejemplos de simetría esférica.

**KARL FRIEDRICH GAUSS** (1777-1855)
*Matemático, físico y astrónomo alemán. Fue un calculista infatigable y le gustaba hacer cálculos enormemente complicados, que hoy se considerarían imposibles sin una computadora electrónica. Inventó muchos métodos nuevos para cálculos de mecánica celeste; después se interesó en fenómenos eléctricos y magnéticos, que investigó en colaboración con Wilhelm Eduard Weber (1804-1891).*

## Simetría esférica

Entre las distribuciones de carga con simetría esférica están puntos, esferas, cascarones esféricos delgados o gruesos, y capas concéntricas de esos objetos.

Conceptos en contexto

**EJEMPLO 4** Aplicar la ley de Gauss para deducir el campo eléctrico de una carga puntual.

**SOLUCIÓN:** Aunque ya se conoce la solución (ley de Coulomb, $E = kq/r^2$), será conveniente obtenerla a partir de la ley de Gauss. Se comenzará con un argumento de simetría: como la carga puntual tiene simetría esférica, también debe tenerla el campo eléctrico. Esa simetría esférica requiere que la magnitud del campo eléctrico sea igual en todos los puntos que estén a distancias iguales del centro; esto es, todos los puntos de una superficie esférica con centro en la carga; de otro modo, el campo eléctrico haría una distinción inaceptable entre esos puntos. Además, la simetría esférica requiere que la dirección del campo eléctrico tenga simetría de rotación en torno a cualquier línea radial que se prolongue de la carga hacia afuera. La única dirección del campo eléctrico acorde con este requisito es la *radial*, ya que cualquier componente no radial haría una distinción inaceptable entre diversas direcciones en torno a esa línea.

Ahora se examinará una superficie esférica de Gauss de radio $r$, con centro en la carga $q$, como muestra la figura 24.6. De acuerdo con los argumentos de simetría, en todos los puntos de esa superficie el campo eléctrico debe ser radial (sale radialmente, para una carga positiva, y entra radialmente, para una carga negativa) y constante (para determinado valor de $r$). En esta superficie de Gauss, el componente normal del campo eléctrico es igual al campo total, $E_\perp = E$, por lo que el flujo es

$$\oint E_\perp \, dA = EA = E \times 4\pi r^2 \tag{24.12}$$

La carga interna no es más que la carga puntual $q$, y entonces de acuerdo con la ley de Gauss,

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{24.13}$$

y de aquí se obtiene de inmediato la ley de Coulomb:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \tag{24.14}$$

**COMENTARIO:** Note que el mismo argumento es válido para *cualquier* distribución de carga con simetría esférica, siempre y cuando $q = Q_{\text{interna}}$. De aquí sale el resultado general: el campo eléctrico $E$ a un radio $r$, debido a *cualquier* distribución de carga con simetría esférica, es el mismo que si toda la carga *dentro de la esfera de radio r* estuviera concentrada en una carga puntual en el centro.

Conceptos en contexto

**EJEMPLO 5** Una región esférica de radio $R$ tiene una carga total $Q$ distribuida uniformemente en el volumen de esa región. *a)* ¿Cuál es el campo eléctrico en puntos del interior de la esfera? *b)* ¿Cuál es el campo eléctrico en puntos fuera de la esfera?

**SOLUCIÓN:** Como hay carga en todo el volumen de la esfera, las líneas de campo de esa distribución de carga comienzan dentro del volumen de la región esférica, a distancias variables del centro (véase la figura 24.11). Fuera de la esfera de carga, la cantidad de líneas de campo eléctrico permanece constante.

*a)* Una vez más, como la distribución de la carga tiene simetría esférica, el campo eléctrico debe ser radial, y de magnitud constante en cualquier superficie esférica de radio $r$. Para determinar la magnitud del campo eléctrico $E$ en el radio $r < R$

dentro de la distribución de cargas, se define la superficie esférica de Gauss que muestra la figura 24.12*a*. Como siempre, en una simetría esférica, $E_\perp = E$ sobre la superficie, así que el flujo a través de esa esfera vuelve a ser el producto $E \times 4\pi r^2$, y la ley de Gauss viene a ser de nuevo

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} \tag{24.15}$$

Para expresar $Q_{\text{interna}}$ en función de las cantidades mencionadas, se aprovechará que la carga está uniformemente distribuida en el volumen especificado. Así, para $r < R$, la carga interna es

$$Q_{\text{interna}} = \rho V_{\text{interno}} \tag{24.16}$$

donde la densidad $\rho$ volumétrica de la carga (carga por unidad de volumen) queda determinada por la carga total $Q$ y el volumen total $V$ *de toda* la esfera cargada:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \tag{24.17}$$

En la ecuación (24.16), la cantidad $V_{\text{interna}}$ es el volumen en el interior de la superficie de Gauss, de radio $r$:

$$V_{\text{interna}} = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Esto se sustituye en la ecuación (24.16), para llegar a

$$Q_{\text{interna}} = \rho V_{\text{interno}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \tfrac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

y entonces la ley de Gauss permite despejar $E$:

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3} \qquad (r \le R) \tag{24.18}$$

Se observa que este campo eléctrico dentro de una esfera uniformemente cargada aumenta en proporción directa al radio $r$. Es cero en el centro y llega a su valor máximo en la orilla de la distribución de carga ($r = R$), en donde es $E = (1/4\pi\epsilon_0)\, Q/R^2$.

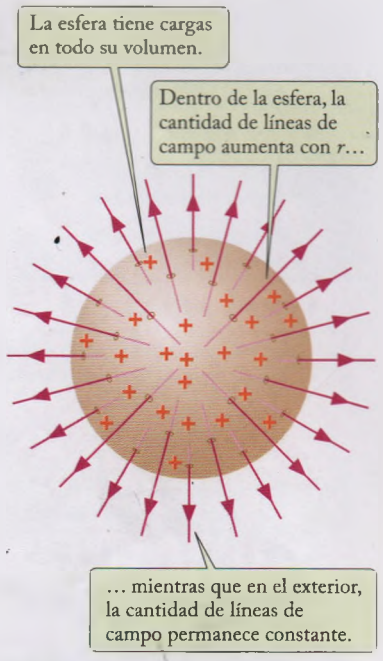



**FIGURA 24.11** Una esfera de radio $R$ con una distribución uniforme de carga positiva en su volumen. Las líneas de campo eléctrico comienzan en cargas positivas a distintos radios. El campo eléctrico siempre tiene dirección radial hacia afuera.

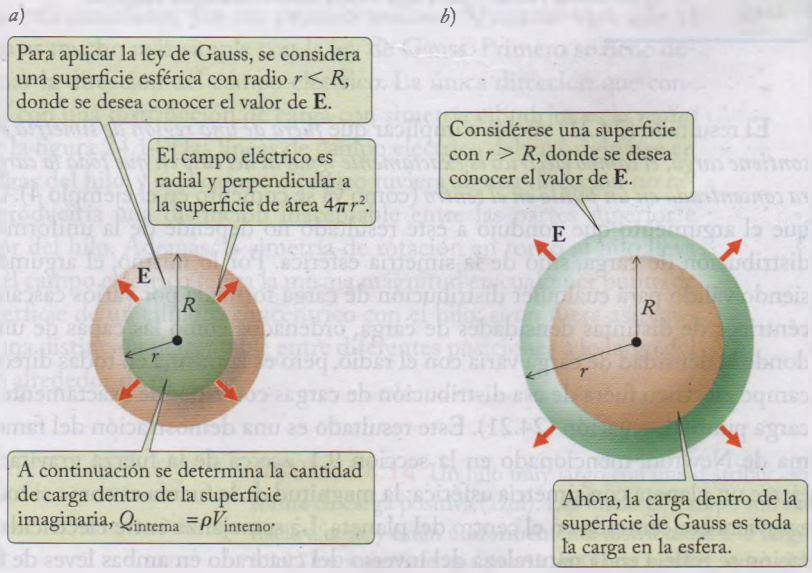



**FIGURA 24.12** *a*) Una superficie esférica imaginaria, de Gauss, con radio $r < R$ (en verde) dentro de una esfera uniformemente cargada de radio $R$ (café). *b*) La misma esfera cargada que en *a*), pero ahora la superficie esférica imaginaria tiene $r > R$.

*b*) Para determinar el campo eléctrico fuera de la esfera, de nuevo se establece una superficie de Gauss de radio $r$, pero ahora $r$ es mayor que $R$ (véase la figura 24.12*b*). Con el acostumbrado argumento de la simetría esférica, la ley de Gauss vuelve a tener la forma

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} \tag{24.19}$$

Para todo $r \geq R$, la carga dentro de la superficie de Gauss ahora es igual a $Q$, la carga total, y entonces

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{24.20}$$

y

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R) \tag{24.21}$$

La figura 24.13 es una gráfica del campo eléctrico en función de la distancia $r$ al centro. Obsérvese que aumenta en forma lineal dentro de la esfera, pero que disminuye en proporción a $1/r^2$ fuera de la distribución.

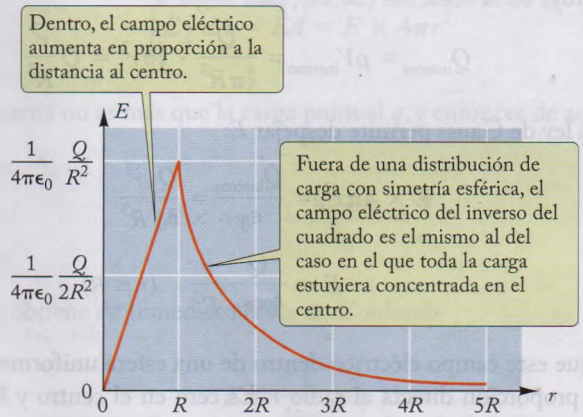



**FIGURA 24.13** Magnitud del campo eléctrico en función de la distancia radial $r$, para una esfera uniformemente cargada.

El resultado (24.21) vuelve a implicar que *fuera de una región de simetría esférica que contiene carga, el campo eléctrico es exactamente igual al del caso en que toda la carga estuviera concentrada en un punto en el centro* (como ya se comentó en el ejemplo 4). Obsérvese que el argumento que condujo a este resultado no depende de la uniformidad de la distribución de carga, sino de la simetría esférica. Por lo mismo, el argumento sigue siendo válido para cualquier distribución de carga formada por varios cascarones concéntricos de distintas densidades de carga, ordenados como las capas de una cebolla, donde la densidad de carga varía con el radio, pero es la misma en todas direcciones. El campo eléctrico fuera de esa distribución de cargas corresponde exactamente al de una carga puntual, ecuación (24.21). Este resultado es una demostración del famoso teorema de Newton, mencionado en la sección 9.1, acerca de la fuerza gravitacional que ejerce un planeta con simetría esférica: la magnitud de la fuerza es como si toda la masa estuviera concentrada en el centro del planeta. La semejanza entre electricidad y gravitación se refleja en la naturaleza del inverso del cuadrado en ambas leyes de fuerza.

**EJEMPLO 6** Un núcleo de uranio (carga $+92e$) es (aproximadamente) una esfera uniformemente cargada de $7.4 \times 10^{-15}$ m de radio. ¿Cuál es el campo eléctrico dentro de un núcleo de uranio, en un punto intermedio entre el centro y la superficie? ¿Cuál es la fuerza eléctrica radial si ese campo actúa sobre un protón, en el mismo punto?

**SOLUCIÓN:** Para calcular el campo eléctrico que se encuentra entre el centro y la superficie de una esfera uniformemente cargada, se usará la ecuación (24.18) con $r = R/2$:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3} = \frac{92e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2R^2}$$

$$= \frac{(92)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)}{(2)(7.4 \times 10^{-15}\ \text{m})^2}$$

$$= 1.2 \times 10^{21}\ \text{N/C}$$

La fuerza que ese campo ejerce sobre un protón es

$$F = eE = (1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.2 \times 10^{21}\ \text{N/C}) = 192\ \text{N}$$

En el núcleo de un átomo, esta gran fuerza de repulsión queda más que compensada por una fuerza de unión todavía más fuerte, (la fuerza "fuerte") que mantiene unido al núcleo.

## Simetría cilíndrica

Entre las distribuciones de carga con simetría cilíndrica están las líneas infinitamente largas, las barras (cilindros macizos), los tubos (cascarones cilíndricos), etc., y las capas concéntricas en esos objetos.

**EJEMPLO 7** Se aplicará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico de un hilo recto, infinitamente largo de carga, con densidad lineal uniforme de carga $\lambda$.

**SOLUCIÓN:** Ya se calculó este campo en el capítulo 23, por integración directa de los campos eléctricos debidos a todas las aportaciones de las cargas infinitesimales; fue un proceso tedioso. Ahora se verá que el cálculo es mucho más simple con la ley de Gauss. Primero se debe determinar la dirección del campo eléctrico. La única dirección que concuerda con una distribución de carga con simetría cilíndrica es la *radial* (véase la figura 24.14); las líneas de campo eléctrico deben originarse en las cargas del hilo, y si el campo eléctrico tuviera alguna dirección no radial, produciría una distinción inaceptable entre las partes superior e inferior del hilo. Además, la simetría de rotación en torno al hilo lleva a que el campo eléctrico tenga la misma magnitud en cualquier punto de la superficie de un cilindro concéntrico con el hilo; si no fuera así, causaría una distinción inaceptable entre diferentes posiciones a lo largo del hilo, o alrededor de él.

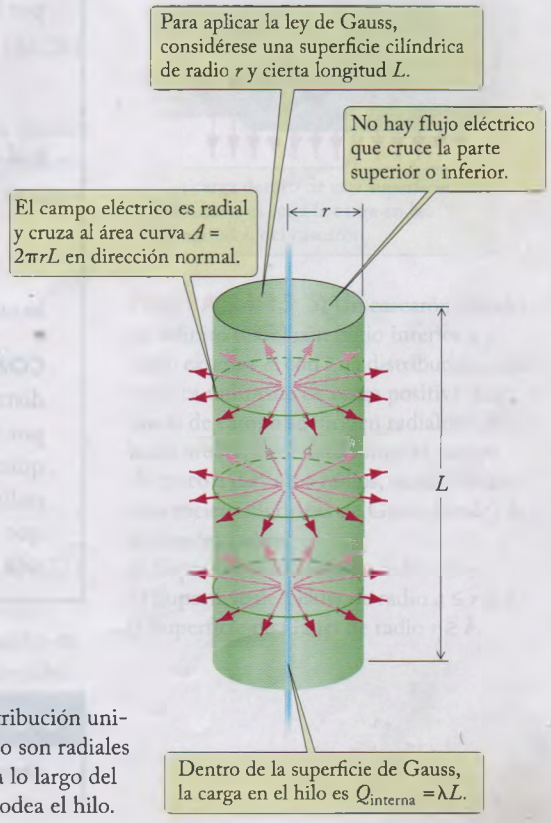



**FIGURA 24.14** Un hilo muy largo con una distribución uniforme de carga positiva (azul). Las líneas de campo son radiales hacia afuera, y están uniformemente distribuidas a lo largo del hilo. Una superficie imaginaria de Gauss (verde) rodea el hilo.

Para problemas con simetría cilíndrica se toma, como superficie de Gauss, una superficie cilíndrica de radio $r$ (donde se quiera conocer $E$) y alguna longitud $L$ arbitraria. La superficie cilíndrica cerrada se compone de dos círculos, tapa y fondo, y un lado curvo. Como el campo eléctrico es radial, es paralelo a las superficies circulares de tapa y fondo, por lo que esas superficies no interceptan el flujo eléctrico. Así, la tapa y el fondo del cilindro aportan cero al flujo en la simetría cilíndrica. También, el campo eléctrico radial es constante y normal sobre el lado curvo de la superficie cilíndrica, que tiene el área $A = 2\pi rL$ (la circunferencia multiplicada por la altura). El flujo total es

$$\begin{aligned}\oint E_\perp\, dA &= \int_{\text{tapa}} E_\perp\, dA + \int_{\text{fondo}} E_\perp\, dA + \int_{\text{lado}} E_\perp\, dA \\ &= 0 + 0 + \int_{\text{lado}} E_\perp\, dA \\ &= E_\perp \int_{\text{lado}} dA = E_\perp A_{\text{lado}} = E_\perp \times 2\pi rL\end{aligned}$$

Entonces, para todos los problemas con simetría cilíndrica, la ley de Gauss se podrá escribir siempre en la forma

$$E \times 2\pi rL = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} \tag{24.22}$$

Para la distribución lineal uniforme sencilla, la carga encerrada por la superficie es la carga por unidad de longitud, multiplicada por la longitud:

$$Q_{\text{interna}} = \lambda L$$

por lo que la ley de Gauss implica que

$$E \times 2\pi rL = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

y al despejar $E$ se ve que

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{24.23}$$

lo cual concuerda con el resultado del capítulo 23, ecuación (23.10).

**COMENTARIO:** Se observa que la misma ecuación (24.23) es válida para *cualquier* distribución de carga con simetría cilíndrica, siempre que $\lambda$ represente la carga total por unidad de longitud en el interior de un cilindro de radio $r$, en cuya superficie se quiere conocer el valor de $E$. Así se llega a otro resultado general: el campo $E$ en el radio $r$, debido a *cualquier* distribución de carga con simetría cilíndrica, es igual al que se produce cuando toda la carga *dentro del cilindro de radio r* está concentrada en una línea de carga a lo largo del eje.

**EJEMPLO 8** Un cascarón aislante grueso, cilíndrico, con radio interior $a$ y radio exterior $b$ tiene una carga distribuida en su volumen, con densidad uniforme de carga volumétrica $\rho$, como se ve en la figura 24.15. Determínese el campo eléctrico en las tres regiones: *a*) $r \leq a$, *b*) $a \leq r \leq b$ y *c*) $r \geq b$.

**SOLUCIÓN:** Como se acaba de describir, en la geometría cilíndrica el campo eléctrico debe ser radial y de magnitud constante, para cualquier radio dado $r$. Así, la ley de Gauss, en simetría cilíndrica, siempre es

$$E \times 2\pi r L = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} \tag{24.24}$$

*a)* Para $r \leq a$, véase la superficie cilíndrica de Gauss mostrada en verde en la figura 24.15*a*. Como está contenida enteramente dentro del "agujero" cilíndrico interno del cascarón, no encierra cargas. Así, $Q_{\text{interna}} = 0$ y $E \times 2\pi r L = 0$, o

$$E = 0 \quad (r \leq a) \tag{24.25}$$

*b)* Para $a \leq r \leq b$, considérese una superficie cilíndrica de Gauss con su lado curvo dentro del cascarón, como en la figura 24.15*b*. En función de la densidad volumétrica de carga dada, $\rho$,

$$Q_{\text{interna}} = \rho V_{\text{interno}}$$

pero para calcular $V_{\text{interno}}$ sólo se debe incluir el volumen que *realmente contenga carga* (y que esté dentro del radio $r$). El volumen del cilindro de Gauss es el área $\pi r^2$ de sus extremos, por su longitud $L$; si se resta el volumen que está vacío, entonces

$$V_{\text{interno}} = \pi r^2 L - \pi a^2 L = \pi L(r^2 - a^2)$$

y la ley de Gauss es

$$E \times 2\pi r L = \frac{\rho V_{\text{interno}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi L(r^2 - a^2)}{\epsilon_0}$$

y de aquí se ve que

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(r - \frac{a^2}{r}\right) \quad (a \leq r \leq b) \tag{24.26}$$

*c)* Cuando $r \geq b$, la superficie cilíndrica de Gauss está fuera del cascarón (véase la figura 24.15*c*). La carga interior se obtiene usando *sólo el volumen que contiene carga* (es el volumen del cascarón cargado, porque se excluye el volumen vacío dentro y fuera del cascarón):

$$Q_{\text{interna}} = \rho V_{\text{interno}} = \rho(\pi b^2 L - \pi a^2 L)$$

y entonces, la ley de Gauss lleva a

$$E \times 2\pi r L = \frac{\rho \pi L(b^2 - a^2)}{\epsilon_0}$$

y

$$E = \frac{\rho(b^2 - a^2)}{2\epsilon_0 r} \quad (r \geq b) \tag{24.27}$$

Nótese la dependencia de $1/r$ de este campo eléctrico fuera de la distribución de carga con simetría cilíndrica. En realidad, la ecuación (24.27) es idéntica al resultado (24.23) para una línea de carga, $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$, pero ahora la carga por unidad de longitud es la carga por unidad de volumen multiplicada por el área transversal del cascarón, esto es, $\lambda = \rho(\pi b^2 - \pi a^2)$.

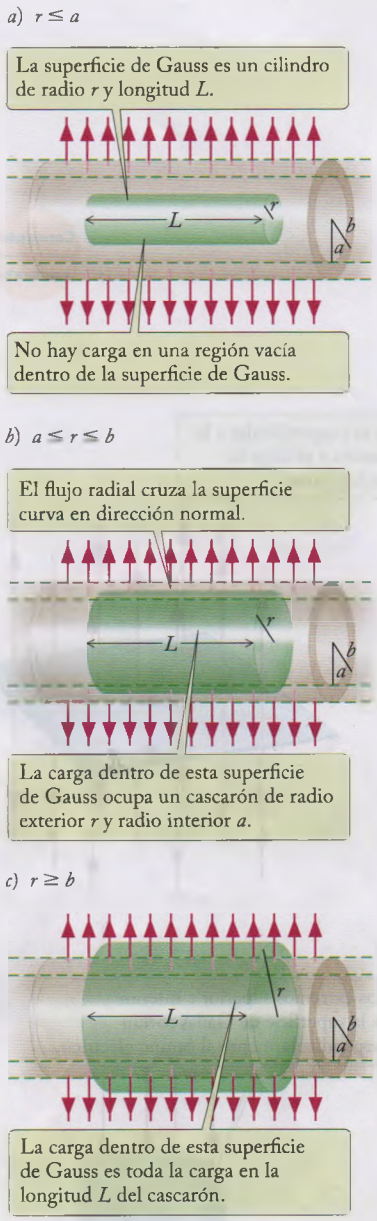



**FIGURA 24.15** *a)* Un cascarón cilíndrico infinito (café) con radio interior $a$ y radio exterior $b$, con una distribución volumétrica uniforme de carga positiva. Las líneas de campo se dirigen radialmente hacia afuera. Para determinar el campo eléctrico a distintos radios, se establecen superficies cilíndricas de Gauss (verde) de diferentes radios:
*a)* Superficie de Gauss de radio $r \leq a$.
*b)* Superficie de Gauss de radio $a \leq r \leq b$.
*c)* Superficie de Gauss de radio $r \geq b$.

## Simetría plana

Entre las distribuciones de carga con simetría plana están las láminas y las placas infinitas de carga, y las capas simétricas de esas láminas o placas.

Conceptos en contexto

**EJEMPLO 9** Aplicando la ley de Gauss, determínese el campo eléctrico de una lámina muy grande y uniforme de carga, con $\sigma$ coulombs por metro cuadrado.

**SOLUCIÓN:** Es otro caso de un campo eléctrico que ya se ha determinado por integración directa en el capítulo 23. También aquí el cálculo es mucho más sencillo con la ley de Gauss. La simetría indica que el campo eléctrico siempre es perpendicular a la lámina de carga, y que su magnitud es constante sobre cualquier superficie determinada que sea paralela a la lámina (véase la figura 24.16*a*). Se definirá una superficie de Gauss con la forma de un cilindro con base de área $A$ que se prolonga simétricamente a cada lado de la lámina de carga (véase la figura 24.16*b*). En esta geometría el campo eléctrico es paralelo a la superficie curva del cilindro, y allí no se corta flujo alguno. En cada uno de los dos extremos circulares, el campo eléctrico es perpendicular a la superficie, y entonces el flujo a través de cada extremo es $EA$. El flujo total es

$$\oint E_\perp \, dA = \int_{\text{fondo}} E_\perp \, dA + \int_{\text{lado curvo}} E_\perp \, dA + \int_{\text{tapa}} E_\perp \, dA$$

$$= EA + 0 + EA = 2EA$$

y entonces la ley de Gauss para esta geometría plana viene a ser

$$2EA = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} \tag{24.28}$$

La cantidad de carga en el interior de la superficie de Gauss es la carga por unidad de área multiplicada por el área de la lámina encerrada por la superficie, es decir, $Q_{\text{interna}} = \sigma A$. Entonces, la ley de Gauss resulta en

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Se simplifica el factor común del área $A$, y se llega a

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{24.29}$$

Este resultado, claro está, concuerda con el que sse obtuvo en la sección 23.2.

**COMENTARIOS:** En esta geometría se pudo haber usado una caja cúbica o rectangular como superficie de Gauss, en lugar de un cilindro. La forma de los extremos es irrelevante; las propiedades esenciales de la superficie de Gauss son que sus extremos deben ser paralelos a la lámina, que la superficie que la rodea debe ser perpendicular a la lámina y que debe ser simétrica en ambos lados de la lámina. Obsérvese que fuera de la distribución plana de la carga, la magnitud del campo eléctrico depende de la distancia a la lámina. Para cada tipo de simetría es útil recordar el comportamiento del campo eléctrico fuera de la distribución de carga: esférica, $E \propto 1/r^2$; cilíndrica, $E \propto 1/r$, y plana, $E \propto$ constante.

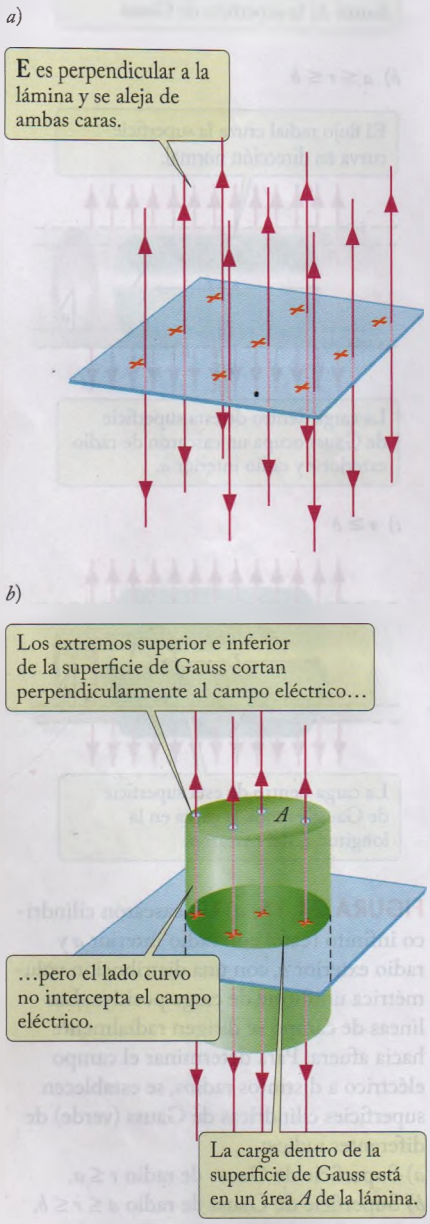



**FIGURA 24.16** *a*) Una lámina muy grande de carga positiva distribuida uniformemente. Las líneas de campo están uniformemente distribuidas. *b*) Una superficie cilíndrica de Gauss; el área de cada extremo es $A$.

**EJEMPLO 10** Una losa aislante infinita, de espesor $d$, tiene una densidad volumétrica uniforme de carga $\rho$, como muestra la figura 24.17. Determínese el campo eléctrico dentro y fuera de la losa.

**SOLUCIÓN:** Con $x = 0$ en el centro de la placa, el "interior" de la losa equivale a que $|x| < d/2$, y "exterior" significa que $|x| > d/2$. Examínense las superficies de Gauss que se ven en la figura 24.17. Para obtener $E$ dentro de la losa se usará el cilindro más pequeño para evaluar $Q_{\text{interna}} = \rho V_{\text{interno}}$. Como su volumen es $V_{\text{interno}}$ = [longitud] × [área de la base] = $2xA$, la ley de Gauss viene a ser

$$2EA = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \times 2xA}{\epsilon_0}$$

y despejando $E$ resulta

$$E = \frac{\rho x}{\epsilon_0} \quad (|x| \leq d/2) \tag{24.30}$$

Así, el campo $E$ es cero en el centro de la losa, y aumenta en forma lineal al aumentar la distancia dentro de la losa.

Fuera de la losa se usará el cilindro de Gauss de mayor tamaño. La cantidad de volumen dentro del mismo, *que contiene carga*, es $V_{\text{interno}} = d \times A$, por lo que la ley de Gauss implica que

$$2EA = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \times d \times A}{\epsilon_0}$$

y

$$E = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \quad (|x| \geq d/2) \tag{24.31}$$

Obsérvese que este campo eléctrico constante es igual al de una lámina de carga ($E = \sigma/2\epsilon_0$), con densidad de carga superficial $\sigma = \rho d$, tal como debería ser.

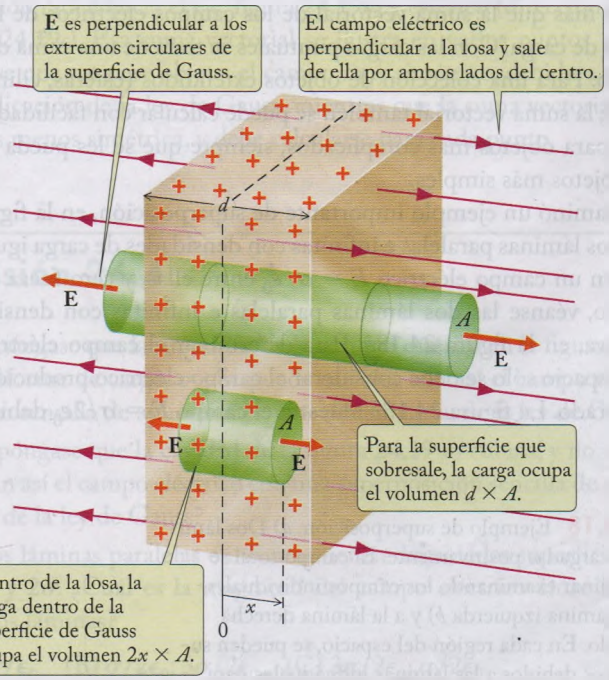



**FIGURA 24.17** Una losa infinita de espesor $d$ y una distribución volumétrica uniforme de carga positiva. Un pequeño cilindro imaginario de Gauss con área transversal $A$ se usa para determinar el campo dentro de la losa, a la distancia $x$ del centro; un cilindro de Gauss más largo, con superficie $A$ en los extremos, se usa para determinar el campo fuera de la losa.

## Revisión 24.3

**PREGUNTA 1:** Una distribución de cargas se compone de cuatro cargas iguales en las esquinas de un cuadrado. ¿Tiene ese arreglo la suficiente simetría para poder aplicar la ley de Gauss y calcular el campo eléctrico a cierta distancia del cuadrado?

**PREGUNTA 2:** Un alambre largo de $10^{-5}$ m de radio tiene una distribución lineal uniforme de carga. Otro alambre largo de $10^{-6}$ m de radio tiene una distribución lineal de carga de la misma magnitud. ¿Cuál alambre produce un campo eléctrico mayor en su superficie?

**PREGUNTA 3:** Una carga $Q$ está distribuida uniformemente en el volumen de una esfera de radio $R$. ¿Cuál es el campo eléctrico en el centro de la esfera? ¿Dónde es más intenso el campo eléctrico? ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico más intenso?

**PREGUNTA 4:** Una carga $Q$ está distribuida en el volumen de una esfera de radio $R$. La distribución de cargas se compone de varias capas concéntricas de distintas densidades de carga. Aunque la densidad de carga varía con el radio, es igual en todas direcciones. ¿Cuál es el campo eléctrico en el centro de esta esfera? ¿Y en la superficie?

**PREGUNTA 5:** El campo eléctrico a cierta distancia de un alambre largo que porta una distribución uniforme de carga es $1.0 \times 10^5$ N/C. ¿Cuál es el campo eléctrico al doble de esta distancia?

(A) $2.5 \times 10^4$ N/C (B) $5.0 \times 10^4$ N/C (C) $1.0 \times 10^5$ N/C
(D) $2.0 \times 10^5$ N/C (E) $4.0 \times 10^5$ N/C

# 24.4 SUPERPOSICIÓN DE CAMPOS ELÉCTRICOS

Vale la pena subrayar que el principio de superposición también es válido para las distribuciones extendidas de carga, de la misma manera que lo fue para las cargas puntuales. Esto es, el campo eléctrico en cualquier punto, debido a varias distribuciones de carga, no es más que la suma vectorial de los campos eléctricos de las distribuciones individuales de carga. Con las cargas puntuales se trata de una suma directa de campos de Coulomb. Para una colección de objetos extendidos (esferas, cilindros, cascarones, planos, etc.), la suma vectorial también se puede calcular con facilidad. Lo mismo puede suceder para objetos más complicados, siempre que se les pueda considerar como sumas de objetos más simples.

Ya se examinó un ejemplo importante de superposición, en la figura 23.10, donde se vio que dos láminas paralelas e infinitas con densidades de carga iguales, pero opuestas, producen un campo eléctrico $E = \sigma/\epsilon_0$ entre ellas, y cero fuera de ellas. Para dar otro ejemplo, véanse las dos láminas paralelas e infinitas con densidades iguales de carga positiva, en la figura 24.18*a*. Para determinar el campo eléctrico total en cada región del espacio sólo se debe considerar el campo eléctrico producido por cada lámina, por separado. La figura 24.18*b* muestra el campo $E = \sigma/2\epsilon_0$ debido a la lámina de

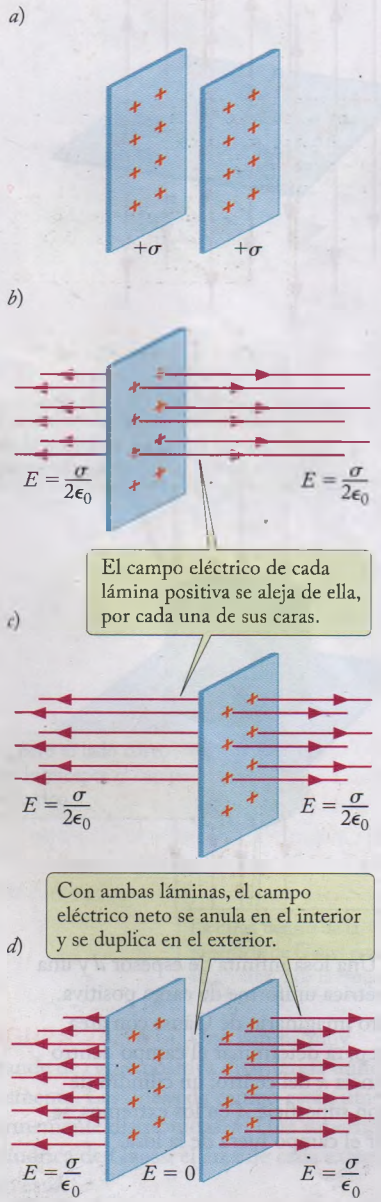



**FIGURA 24.18** Ejemplo de superposición. *a)* Dos láminas infinitas cargadas positivamente. El campo total se puede determinar examinando los campos individuales debidos a la lámina izquierda *b)* y a la lámina derecha *c)* por separado. En cada región del espacio, se pueden sumar los campos debidos a las láminas individuales para obtener el campo total *d)*.

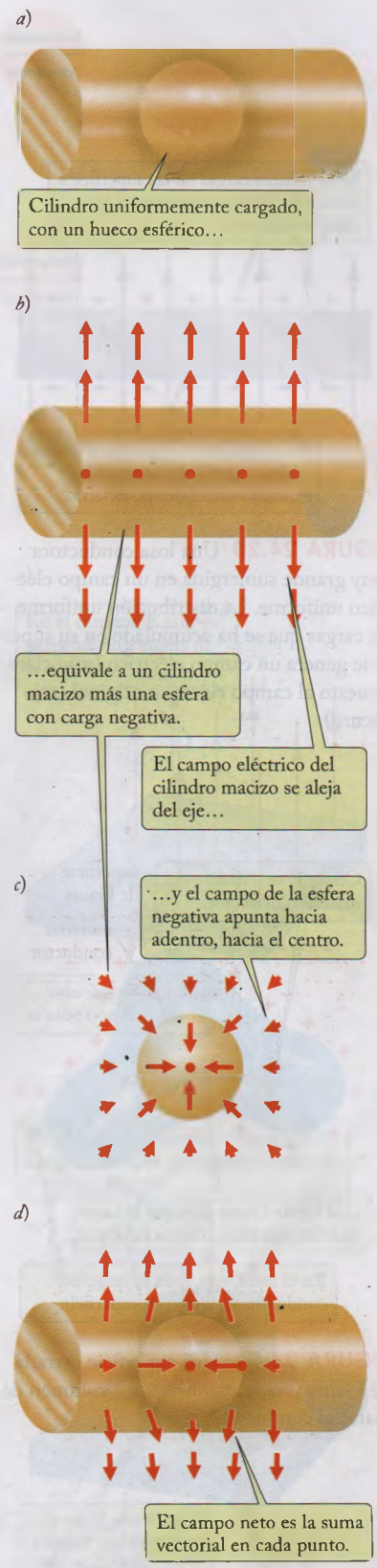



**FIGURA 24.19** Ejemplo de superposición. *a*) Un cilindro macizo, infinito, con una distribución volumétrica uniforme de carga positiva y con un hueco esférico. El campo debido a ese objeto, con su volumen faltante, se puede determinar sumando el campo debido a un cilindro macizo *b*) y el campo debido a una esfera con carga opuesta *c*). En cada punto, el campo neto *d*) es la suma vectorial de esos dos campos.

la izquierda, que se aleja de la misma por cada una de sus caras; de igual manera, la figura 24.18*c* muestra el campo debido a la lámina de la derecha, que se aleja de ella en cada una de sus caras. Cuando se suman los campos debidos a las dos láminas, como en la figura 24.18*d*, se ve de inmediato que $E = 0$ entre las dos láminas, mientras que $E = \sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0$ a izquierda y derecha de ambas láminas. Estos ejemplos de láminas con densidades de carga de igual magnitud conducen a sencillas duplicaciones o anulaciones del campo. Sin embargo, el principio de superposición también se puede aplicar con la misma facilidad a cualquier cantidad de láminas, con cualquier valor de densidades de carga uniforme superficiales.

Otro ejemplo se muestra en la figura 24.19*a*. En este caso es un cilindro macizo con distribución uniforme de carga volumétrica $\rho$, que tiene una cavidad esférica en su interior. Ese hueco se puede percibir formado por cantidades iguales de carga positiva y negativa (carga neta cero en el hueco), por lo que el campo eléctrico en cualquier punto es la suma del campo eléctrico debido a un cilindro macizo (sin hueco) con densidad de carga $\rho$, y el producido por una esfera maciza con densidad de carga $-\rho$. Naturalmente, en cualquier posición del espacio se debe hacer la suma vectorial de los campos cilíndrico (dirección radial hacia el eje, figura 24.19*b*) y esférico (dirección radial hacia el centro, figura 24.19*c*). Esa suma vectorial se ilustra en varios puntos, en la figura 24.19*d*. Obsérvese que para ese objeto, el campo muy simétrico, debido a cada "trozo" es una simple aplicación de la ley de Gauss, mientras que la suma vectorial de las dos contribuciones es menos simétrica, y debe calcularse para cada punto.

## Revisión 24.4

**PREGUNTA 1:** Supóngase que la superficie de la cavidad esférica en la figura 24.19 tiene una densidad uniforme de carga, $\sigma$. ¿Se puede calcular aun así el campo eléctrico con una superposición sencilla de aplicaciones, con alta simetría, de la ley de Gauss?

**PREGUNTA 2:** Supóngase que la cavidad de la figura 24.19 es cúbica, y no esférica. ¿Se puede calcular aun así el campo eléctrico con una superposición sencilla de aplicaciones con alta simetría de la ley de Gauss?

**PREGUNTA 3:** Dos láminas paralelas e infinitas tienen densidades superficiales uniformes de carga, $\sigma$ y $2\sigma$. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las láminas? ¿Y fuera de las dos láminas?

(A) $\sigma/\epsilon_0$; $3\sigma/\epsilon_0$ (B) $\sigma/2\epsilon_0$; $3\sigma/2\epsilon_0$ (C) $3\sigma/2\epsilon_0$; $\sigma/2\epsilon_0$
(D) $\sigma/\epsilon_0$; 0 (E) 0; $\sigma/\epsilon_0$

Conceptos en contexto

# 24.5 CONDUCTORES Y CAMPOS ELÉCTRICOS

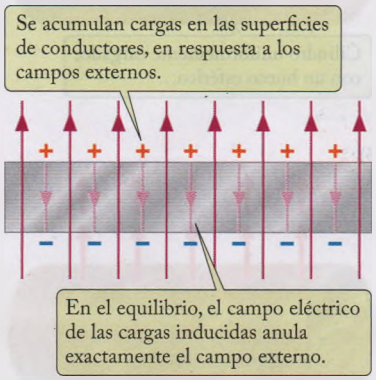



**FIGURA 24.20** Una losa conductora muy grande sumergida en un campo eléctrico uniforme. La distribución uniforme de cargas que se ha acumulado en su superficie genera un campo eléctrico (rojo claro) opuesto al campo eléctrico original (rojo oscuro).

En los aislantes (o *dieléctricos*), los electrones y los iones de los átomos están firmemente unidos entre sí, y no hay cargas libres móviles. En un aislante se pueden insertar cargas adicionales, en una distribución arbitraria; esas cargas también permanecen insertadas y no se mueven. Sin embargo, como se indicó en la sección 22.5, las cargas sí se pueden mover en los conductores. Por ejemplo, en los metales, como cobre, plata o aluminio, algunos de los electrones están libres; esto es, se pueden mover sin restricción dentro del volumen del metal. Si ese conductor se sumerge en un campo eléctrico, los electrones libres se mueven como respuesta a la fuerza eléctrica. En una parte del conductor se acumula un exceso de electrones y en la otra parte del conductor aparece un déficit de electrones; de esta forma se inducen cargas negativas y positivas en el conductor. Dentro del volumen del conductor, el campo eléctrico de las cargas inducidas tiende a anular el campo eléctrico externo dentro del cual se sumergió el conductor (véase la figura 24.20). La acumulación de cargas negativas y positivas en las superficies del conductor continúa, hasta que el campo eléctrico generado por esas cargas anula exactamente el campo eléctrico original que produjo el movimiento de los electrones. En consecuencia, *cuando la distribución de cargas en un conductor alcanza el equilibrio electrostático, el campo eléctrico neto dentro del material del conductor es exactamente cero.* Se llega a la demostración de esta afirmación por contradicción: si el campo eléctrico fuera distinto de cero, los electrones libres continuarían moviéndose y la distribución de cargas no estaría (todavía) en equilibrio. En un buen conductor (cobre, aluminio, etc.) el equilibrio se alcanza rápidamente, en una fracción de segundo.

Además, *para un conductor en equilibrio eléctrico, cualquier carga eléctrica (adicional) que se deposite en el conductor está en las superficies del mismo.* Esto se puede demostrar aplicando la ley de Gauss: considérese una pequeña superficie de Gauss *dentro* del material conductor (véase la figura 24.21). Como $E = 0$ en el equilibrio, en todo ese material, el lado izquierdo de la ecuación de la ley de Gauss se anula, por lo que el lado derecho también se debe anular; eso significa que la carga encerrada por *cualquier* superficie arbitraria en el interior del material conductor debe ser cero. Es obvio que si las cargas no están dentro del conductor, deben estar en su superficie.

**FIGURA 24.21** Una superficie cerrada de Gauss (verde) dentro de un volumen de material conductor.

Por último, se puede decir algo acerca del campo eléctrico afuera de un conductor: *el campo eléctrico en la superficie de un conductor en equilibrio electrostático es perpendicular a su superficie.* La demostración es de nuevo por contradicción: si el campo eléctrico tuviera un componente tangencial a la superficie, los electrones libres se moverían por la superficie, y la distribución de cargas no estaría en equilibrio.

Tenga en cuenta que este argumento no excluye campos eléctricos perpendiculares a la superficie del conductor; tales campos eléctricos sólo empujan a los electrones libres contra la superficie, donde se mantienen en equilibrio por la combinación de la

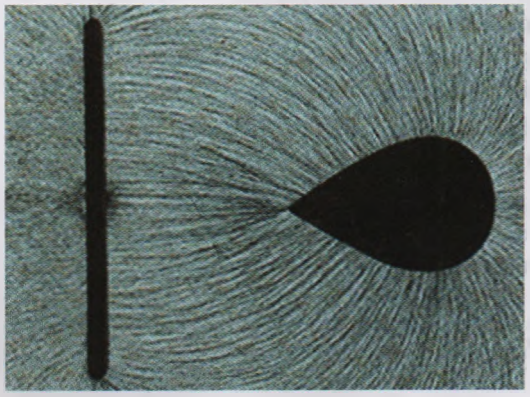


**FIGURA 24.22** Líneas de campo en el espacio que rodea a conductores cargados; para hacerlas visibles se usan pequeños trozos de hilo suspendidos en aceite.

fuerza ejercida por el campo eléctrico y la fuerza de restricción de la superficie del conductor. La figura 24.22 corresponde a una demostración experimental de campos eléctricos perpendiculares a las superficies de los conductores. La placa plana y el cilindro en esa figura son conductores, y se ve que las líneas de campo llegan a las superficies formando ángulo recto.

**EJEMPLO 11** Determínese el campo eléctrico arriba de una losa conductora muy grande (véase la figura 24.23) sobre la que hay una densidad superficial de carga de $\sigma$ coulombs por metro cuadrado.

Conceptos en contexto

**SOLUCIÓN:** En vista de la simetría de la configuración de las cargas, el campo eléctrico será perpendicular a la losa conductora, y tendrá magnitud constante sobre cualquier plano paralelo a la losa. Como superficie de Gauss se tomará el cilindro que muestra la figura 24.23, con área $A$ de base. La base superior aporta al flujo una cantidad $EA$. La base inferior está dentro del conductor y no contribuye al flujo, porque en esa región el campo eléctrico es cero. Por último, el lado curvo no contribuye al flujo porque todo campo eléctrico es paralelo a esa superficie. La carga dentro de la superficie de Gauss es $Q_{\text{interna}} = \sigma A$. Entonces, de la ley de Gauss,

$$\oint E_{\perp}\, dA = EA = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \tag{24.32}$$

se obtiene

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{24.33}$$

Éste es un campo eléctrico constante, independiente de la distancia a la losa conductora. Este resultado es estrictamente válido para una losa de extensión infinita, pero es aproximadamente válido para el campo eléctrico cercano a una losa de extensión finita.

**COMENTARIOS:** Obsérvese que, para determinado valor de la densidad $\sigma$ de carga superficial, el campo generado por una losa conductora tiene doble magnitud que el campo generado por una lámina de carga [véase la ecuación (24.29)]. La razón queda clara al comparar las figuras 24.16 y 24.23. En esta última, las cargas sólo producen flujo en una cara de la superficie, y en la primera, el flujo se distribuye en ambas caras. ¿Cómo es posible? En el caso del conductor, siempre debe haber otra distribución de carga superficial que produzca un campo que anule al debido a la superficie que muestra la figura 24.23. Por ejemplo, una losa conductora infinita cargada se puede considerar como dos láminas cargadas, como las dos que muestra la figura 24.18.

En una región pequeña, *cercana a la superficie*, toda superficie conductora lisa y curva se puede aproximar a una superficie plana. Entonces se puede aplicar la fórmula (24.33) para determinar el campo eléctrico en una región muy cercana a *cualquier* superficie conductora curva (pero $E = \sigma/\epsilon_0$ *no es* una buena aproximación cerca de aristas agudas). La fórmula es válida aunque $\sigma$ no sea constante; si $\sigma$ depende de la posición en la superficie, el campo eléctrico también depende, entonces, de la posición.

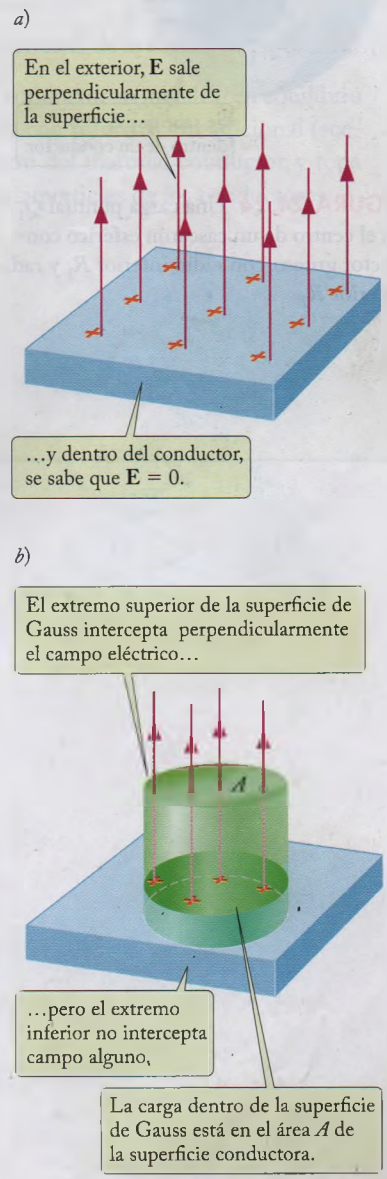



**FIGURA 24.23** *a*) Una losa conductora grande, con una distribución uniforme de cargas en su superficie. *b*) La superficie cilíndrica de Gauss tiene una base fuera del conductor, y la otra base dentro del conductor.

Conceptos en contexto

**EJEMPLO 12** Una carga puntual $Q_1$ está en el centro de un cascarón esférico conductor, de radio interior $R_1$ y radio exterior $R_2$, como muestra la figura 24.24. El cascarón tiene una carga neta $Q_2$ en sus superficies. Calcúlese el campo eléctrico en las tres regiones: $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r > R_2$. ¿Cuánta carga hay en la superficie interna del cascarón? ¿Y en la superficie externa?

**SOLUCIÓN:** Para toda superficie esférica de Gauss con radio $r < R_1$, sólo está la carga puntual dentro de la superficie, así que $Q_{\text{interna}} = Q_1$. La ley de Gauss para simetría esférica resulta en $E \times 4\pi r^2 = Q_1/\epsilon_0$, y

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r < R_1) \tag{24.34}$$

La región $R_1 < r < R_2$ está en el interior del material conductor, y ya se sabe de inmediato que

$$E = 0 \quad (R_1 < r < R_2) \tag{24.35}$$

Para una superficie de Gauss esférica de radio $r > R_2$, la carga encerrada es $Q_1 + Q_2$, así que con la ley de Gauss resulta

$$E = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R_2) \tag{24.36}$$

Para determinar la carga en la superficie interna, se aplica la ley de Gauss al revés: como $E = 0$ en el material conductor, la carga neta debe ser cero en el interior de cualquier esfera de Gauss en el material conductor ($R_1 < r < R_2$). Ya que una carga puntual $Q_1$ está en el centro del cascarón esférico, la carga en la superficie interna del cascarón debe ser opuesta a $Q_1$:

$$Q_{\text{superficie interna}} = -Q_1 \tag{24.37}$$

Se dice que la carga puntual *induce* una carga igual y opuesta en la superficie interna del conductor. Para determinar la carga en la superficie externa, sólo se aplicará la conservación de la carga:

$$Q_{\text{superficie externa}} = Q_2 - Q_{\text{superficie interna}} = Q_2 - (-Q_1) = Q_2 + Q_1 \tag{24.38}$$

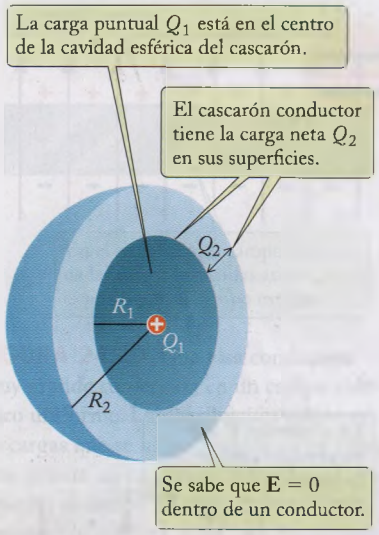



**FIGURA 24.24** Una carga puntual $Q_1$ en el centro de un cascarón esférico conductor grueso, con radio interior $R_1$ y radio exterior $R_2$.

La necesidad electrostática de que $E = 0$ en un material conductor puede producir cargas inducidas en cualquier cantidad de cascarones conductores, con geometría esférica o cilíndrica. Siempre se podrá definir una superficie de Gauss dentro del material conductor de determinado cascarón, y el requisito de que la carga neta sea cero dentro de la superficie de Gauss implica que la carga en la superficie interior de ese cascarón es exactamente opuesta a cualquier carga neta dentro de ese cascarón. Esas cargas interiores pueden estar en cualquier cantidad de otras capas conductoras o aislantes, o en una esfera o carga puntual central (geometría esférica) o en un hilo central de carga (geometría cilíndrica).

Cuando la geometría es plana, hay una diferencia: una lámina infinita con densidad de carga superficial $\sigma$ inducirá una densidad de carga de sólo $-\sigma/2$ en la cara cercana de una losa conductora paralela: también debe inducir una densidad de carga opuesta, $+\sigma/2$, en la cara lejana de la losa. En los cascarones esféricos y cilíndricos, esta carga "exterior" no contribuye al campo en el interior del conductor, pero en la losa plana la contribución es igual a la de la otra cara. Por último, se vio en el ejemplo 12 que el valor de la carga en la superficie exterior de cualquier cascarón conductor, esférico o cilíndrico, es igual a la carga neta en ambas superficies del cascarón, menos el valor de cualquier carga inducida en su superficie interior. Sin embargo, para una losa conductora plana, cualquier carga neta en las superficies se divide por igual entre las dos caras de la losa.

## TÉCNICAS PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

## LA LEY DE GAUSS PARA DISTRIBUCIONES DE CARGAS CON SIMETRÍA

Como en los ejemplos 4 a 12, el cálculo del campo eléctrico se facilita con la ley de Gauss sólo si la distribución de cargas tiene mucha simetría (esférica, cilíndrica o plana). En ese caso, se usa la ley de Gauss

$$\oint E_{\perp}\, dA = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0}$$

de la siguiente manera:

1. Se determina la *dirección* del campo eléctrico de acuerdo con la simetría: *radial* para geometrías esféricas y cilíndricas; *normal* para geometrías planas.
2. Se define una superficie de Gauss (imaginaria) en la región donde se desea conocer el campo eléctrico: una esfera de radio $r$, un cilindro de radio $r$ y longitud $L$, o un cilindro con área transversal $A$, como en los ejemplos.
3. Se reformula el lado izquierdo de la ecuación de la ley de Gauss (el flujo eléctrico) como el producto [campo eléctrico] × [área] en una de las siguientes formas:

$$\oint E_{\perp}\, dA = \begin{cases} E \times 4\pi r^2 & \text{(esférica)} \\ E \times 2\pi r L & \text{(cilíndrica)} \\ 2EA & \text{(plana, ambos extremos en el campo)} \\ EA & \text{(plana, un extremo en el campo)} \end{cases}$$

4. Para el lado derecho de la ecuación de la ley de Gauss, se determina $Q_{\text{interna}}$ para la superficie de Gauss. Asegurarse de sólo incluir la carga *dentro* de la superficie. Se podrá necesitar expresar la carga encerrada en función de la densidad de carga apropiada (véanse los ejemplos 4 a 12). Con densidades uniformes, usar

| | |
|---|---|
| Línea: | $q = \lambda L$ |
| Superficie: | $q = \sigma A$ |
| Volumen: | $q = \rho V$ |

5. Aplicar la ley de Gauss: iguálese la expresión adecuada (para $\oint E_{\perp}\, dA$) con $Q_{\text{interna}}/\epsilon_0$.
6. Despéjese el campo eléctrico $E$ de la ecuación que resulte.
7. Si el problema implica conductores (metales) en equilibrio electrostático, se cuenta con información adicional (sección 24.5): $E = 0$ dentro del material conductor, y toda carga neta reside en las superficies de los conductores.

## Revisión 24.5

**PREGUNTA 1:** ¿Puede haber un campo eléctrico en el interior del material de un conductor en equilibrio electrostático?

**PREGUNTA 2:** Un campo eléctrico horizontal uniforme tiene dos líneas de campo. Supóngase que se puede introducir una esfera de cobre, sin carga, en ese campo eléctrico. ¿Alterará eso la dirección de las líneas de campo?

**PREGUNTA 3:** Una hoja de papel grande y horizontal tiene una distribución uniforme de cargas, igual a $10^{-6}$ C/m$^2$. Una placa grande horizontal de aluminio tiene una distribución uniforme de carga de $10^{-6}$ C/m$^2$ dividida por igual en sus caras superior e inferior ($0.5 \times 10^{-6}$ C/m$^2$ en cada cara). Compárense los campos eléctricos producidos arriba y abajo de la hoja de papel y de la placa de aluminio.

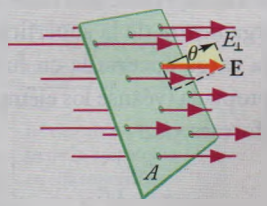
**PREGUNTA 4:** Una carga puntual $Q$ está en el centro de un cascarón conductor esférico sin carga. ¿Cuánta carga hay en la superficie interna del cascarón? ¿Y en la superficie externa?

(A) 0; 0 (B) $Q$; 0 (C) $-Q$; 0 (D) $-Q$; $Q$ (E) $Q$; $-Q$

# RESUMEN

**TÉCNICAS PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS** La ley de Gauss para distribuciones de carga con simetría **(página 777)**

**FLUJO ELÉCTRICO A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE ABIERTA**




$$\Phi_E = \mathbf{E}\cdot\mathbf{A} = E_\perp A = EA\cos\theta \quad \text{(superficie plana, E uniforme)} \qquad \textbf{(24.1)}$$

$$\Phi_E = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int E_\perp\, dA \quad \text{(superficie arbitraria, E variable)} \qquad \textbf{(24.5)}$$

**FLUJO ELÉCTRICO A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE CERRADA**
(positivo para **E** hacia afuera)

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint E_\perp\, dA \qquad \textbf{(24.6)}$$

**LEY DE GAUSS**

$$\oint E_\perp\, dA = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(24.10)}$$

donde

$$\oint E_\perp\, dA = \begin{cases} E \times 4\pi r^2 & \text{(esférica)} \\ E \times 2\pi r L & \text{(cilíndrica)} \\ 2EA & \text{(plana, ambos extremos en el campo)} \\ EA & \text{(plana, un extremo en el campo)} \end{cases}$$

**DISTRIBUCIONES UNIFORMES DE CARGA**

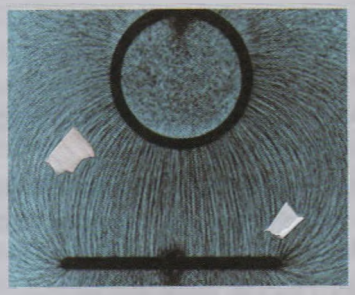
Línea: $q = \lambda L$

Superficie: $q = \sigma A$ **(24.11)**

Volumen: $q = \rho V$

**CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO**

El campo eléctrico en el interior del material conductor es cero. Toda la carga está en la superficie (o las superficies). El campo eléctrico en la superficie es perpendicular a ella, y su magnitud es $E = \sigma/\epsilon_0$.



# PREGUNTAS PARA DISCUSIÓN

1. Una carga puntual $Q$ está en el interior de una superficie de Gauss esférica, que a su vez está encerrada en una superficie de Gauss mayor, cúbica. Compárense los flujos a través de esas dos superficies.

2. La figura 24.25 muestra una superficie de Gauss, y líneas de campo eléctrico que entran y salen de la superficie. ¿Qué se puede decir acerca del signo de la carga eléctrica dentro de la superficie?

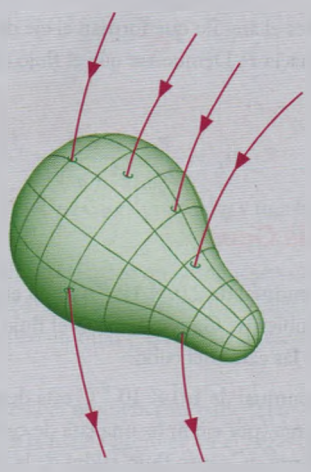


**FIGURA 24.25** Superficie de Gauss y algunas líneas de campo.

3. Supóngase que se hubiera adoptado alguna norma para el número de líneas de flujo por unidad de carga, por ejemplo, $1/(\epsilon_0)$ $\epsilon_0$ líneas por unidad de carga. ¿Cambiaría eso la ley de Gauss?
4. Una superficie de Gauss contiene un dipolo eléctrico, y ninguna carga más. ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de esa superficie?
5. Una carga puntual está en el centro de un cascarón esférico. Si se mueve hasta un lugar dentro de la superficie del cascarón ¿cambia el flujo eléctrico a través del cascarón?
6. Supóngase que el campo eléctrico de una carga puntual no fuera exactamente proporcional a $1/r^2$, sino a $1/r^{2+a}$, siendo $a$ un número pequeño, $a \ll 1$. ¿Seguiría siendo válida la ley de Gauss? (Sugerencia: Considérese la ley de Gauss para el caso de una carga puntual.)
7. Los problemas que se resuelven con la ley de Gauss caen en tres categorías, de acuerdo con su simetría: esférica, cilíndrica o plana. Descríbanse algunos ejemplos de cada categoría.
8. Un hemisferio de radio $R$ tiene una carga $Q$ uniformemente distribuida en su volumen. ¿Se puede aplicar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico?
9. Un globo esférico de hule, de radio $R$, tiene una carga $Q$ uniformemente distribuida en su superficie. El globo se coloca en un campo eléctrico uniforme de 120 N/C. ¿Cuál es el campo eléctrico neto dentro del globo de hule?
10. El campo eléctrico en la superficie de un conductor en equilibrio estático es perpendicular a esa superficie. El campo gravitacional a la superficie de una masa en equilibrio estático ¿es necesariamente perpendicular a esa superficie? ¿Y si la superficie es la de un fluido, como agua?
11. Supóngase que se deja caer una pelota de tenis de mesa, con carga, en una lata metálica y de inmediato se tapa. ¿Qué sucede con las partes de las líneas de campo eléctrico fuera de la lata, cuando se cierra la tapa?
12. Cuando una corriente eléctrica pasa por un alambre conectado entre una fuente y un sumidero de cargas eléctricas, como por ejemplo las terminales de una batería, dentro del alambre hay un campo eléctrico, aun cuando el alambre sea conductor. ¿Por qué no se aplica en este caso la conclusión acerca de que el campo eléctrico es cero dentro de un conductor?
13. Los electrones libres pertenecientes a un metal están uniformemente distribuidos en todo el volumen del metal. ¿Contradice eso el resultado que se dedujo en la sección 24.5, de acuerdo con el cual se supone que las cargas residen en la superficie de un conductor?

# PROBLEMAS

## 24.1 Flujo eléctrico

1. Acerca de la nube de tormenta descrita en el problema 19 del capítulo 23, y en la figura 23.34, ¿cuál es el flujo eléctrico total que sale de la superficie de la nube?
2. Una pequeña superficie cuadrada, de 1.0 cm × 1.0 cm, se coloca a 1.0 m de distancia de una carga puntual de $3.0 \times 10^{-9}$ C. ¿Cuál es el flujo eléctrico aproximado a través de ese cuadrado, si su cara está orientada hacia el campo eléctrico (véase la figura 24.26)? ¿Y si se gira 30°? ¿Y si se gira 60°?

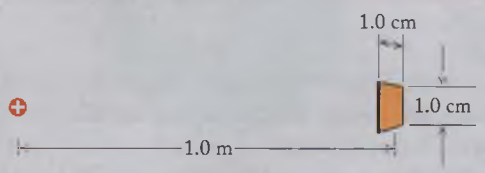



**FIGURA 24.26** Carga puntual y pequeña superficie cuadrada.

3. La magnitud y la dirección de un campo eléctrico constante se definen con el vector $\mathbf{E} = 2.0\mathbf{i} - 1.0\mathbf{j} + 3.0\mathbf{k}$, estando expresado el campo en N/C. ¿Cuál es el flujo que produce ese campo eléctrico a través de la superficie que muestra la figura 24.27, formada por tres cuadrados de $L \times L = 0.20$ m × 0.20 m, unidos entre sí por sus orillas?

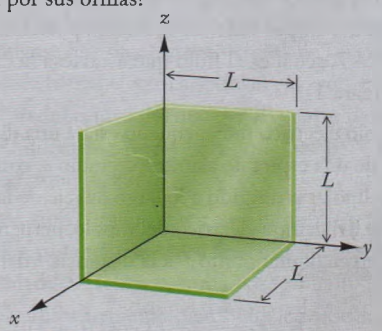



**FIGURA 24.27** Superficie formada por tres cuadrados unidos por sus orillas.

4. Una nube de tormenta produce un campo eléctrico vertical de magnitud $2.8 \times 10^4$ N/C cerca del nivel del suelo. Si se sujeta una hoja de papel de 22 cm × 28 cm horizontalmente, debajo de la nube, ¿cuál es el campo eléctrico que atraviesa la hoja? ¿Cuál es el flujo si se la sujeta en posición vertical?

5. Las cuatro caras de una pirámide tetraédrica son triángulos equiláteros de lado $a$. Esa pirámide descansa con una cara sobre una lámina infinita de carga, con densidad superficial de carga $\sigma$. ¿Cuál es el flujo que atraviesa la cara de la pirámide que descansa en la lámina? ¿Cuál es el flujo a través de cada una de las otras tres caras?

6. Un campo eléctrico uniforme está definido por $\mathbf{E} = (3.0\ \text{N/C})\mathbf{i} + (2.0\ \text{N/C})\mathbf{j} - (1.0\ \text{N/C})\mathbf{k}$. ¿Cuál es el flujo a través de un área plana, de 4.0 m$^2$ que yace en el plano $y$-$z$? ¿Y si la misma área tuviera la normal a su superficie a lo largo de una diagonal octante, de modo que el vector unitario normal fuera $\hat{\mathbf{n}} = (1/\sqrt{3})\mathbf{i} + (1/\sqrt{3})\mathbf{j} + (1/\sqrt{3})\mathbf{k}$?

7. La dirección de un campo eléctrico uniforme está en el plano $y$-$z$, formando un ángulo de 30° con el eje $+y$, y de 60° con el eje $+z$. Este campo uniforme se extiende en toda la región de un cubo de 2.0 m por lado, como el de la figura 24.7. ¿Cuál es el flujo eléctrico que atraviesa cada una de las caras del cubo, identificadas con 1 a 6 en la figura 24.7*b*? ¿Cuál es el flujo neto?

*8. Una carga puntual de $6.0 \times 10^{-8}$ C está a cierta distancia sobre el plano $x$-$y$. ¿Cuál es el flujo eléctrico que produce esa carga a través del plano $x$-$y$ (infinito)? ¿Depende ese flujo de la distancia?

*9. Obsérvese el plano intermedio (infinito) entre dos cargas de igual magnitud y signos contrarios (véase la figura 23.17). Si las cargas son $\pm q$, ¿cuál es el flujo eléctrico que atraviesa el plano intermedio?

*10. Una carga puntual de $6.0 \times 10^{-8}$ C está sobre el piso de madera de una habitación. Se sujeta un pequeño cuadro de cartón, que mide 1.0 cm × 1.0 cm, con la cara hacia abajo, y lo pasa por todo el cuarto a una altura de 2.0 m, pasando sobre la posición de la carga puntual. Haga una gráfica aproximada del flujo que atraviesa el cuadrado, en función de la posición.

*11. Un campo eléctrico no uniforme apunta siempre hacia la dirección $+x$, por lo que $\mathbf{E} = E_x\mathbf{i}$. La magnitud del campo es independiente de la coordenada $z$, y varía con $x$ y $y$ de acuerdo con $E_x = C(x - 2y)$; $x$ y $y$ están en metros, y $C$ es una constante cuyo valor es $C = 3.6 \times 10^2$ N/(C · m). Para un cubo de 2.0 m por lado, en la misma posición que la de la figura 24.7, ¿cuál es el flujo que atraviesa la cara $y$-$z$ a $x$ = 1.0 m (cara 1)?

*12. Un dipolo eléctrico muy pequeño está a una distancia $z$ del centro de una espira de alambre de radio $a$, con su vector momento dipolar $\mathbf{p}$ dirigido a lo largo del eje de la espira. El componente del campo eléctrico del dipolo, perpendicular a la espira, en cualquier punto $P$ a la distancia $r$ del dipolo, es

$$E_\perp = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

en la que $\theta$ es el ángulo que forman el eje de la espira y la línea del dipolo hacia $P$. Demuestre que el flujo eléctrico a través de la espira es

$$\Phi_E = \frac{p}{2\epsilon_0}\frac{a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

## 24.2 La ley de Gauss

13. Una carga puntual de $2.0 \times 10^{-12}$ C está en el centro de una superficie cúbica de Gauss. ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de *cada una* de las caras del cubo?

14. Una carga puntual de $1.0 \times 10^{-8}$ C está dentro de una lata metálica sin carga (por ejemplo, una lata de cerveza cerrada) y aislada de la tierra. ¿Cuánto flujo saldrá de la superficie de la lata, cuando la carga puntual esté dentro?

15. Se coloca una carga puntual $q$ a cierta distancia de una lámina plana, infinitamente grande, que tiene una distribución uniforme de carga de $\sigma$ coulombs por m$^2$.

    *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico que produce esa carga puntual a través de la lámina?

    *b*) El flujo eléctrico $\Phi$ es la integral $\int E_\perp\, dA$; por consiguiente, el producto $\sigma\Phi$ es igual a $\int \sigma E_\perp\, dA$, que es igual a la fuerza eléctrica que ejerce la carga puntual sobre la lámina. Úsese el flujo calculado en *a*) para evaluar esta fuerza.

    *c*) De acuerdo con la fuerza que ejerce la carga puntual sobre la lámina, determínese la fuerza que ejerce la lámina sobre la carga puntual. De acuerdo con lo anterior, determínese el campo eléctrico que produce la lámina en la posición de la carga puntual.

16. Una carga puntual $q$ se coloca a una distancia perpendicular $d/2$ del centro de un cuadrado de tamaño $d \times d$, que tiene una distribución uniforme de carga de $\sigma$ coulombs por m$^2$ (véase la figura 24.28).

    *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico que produce esa carga puntual a través del cuadrado? (Sugerencia: El cuadrado es una de las seis caras de un cubo que rodean la carga puntual.)

    *b*) Siga los pasos del problema 15 y determine el campo eléctrico que produce el cuadrado en la posición de la carga puntual.

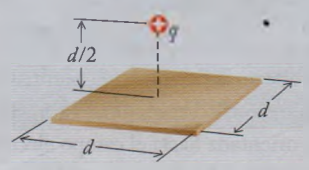



**FIGURA 24.28** Una carga puntual $q$ y un cuadrado con carga

17. Una carga puntual se coloca a la distancia $d/2$ de una banda plana infinitamente larga, de ancho $d$, que tiene una distribución uniforme de carga de $\sigma$ coulombs por m$^2$ (véase la figura 24.29).

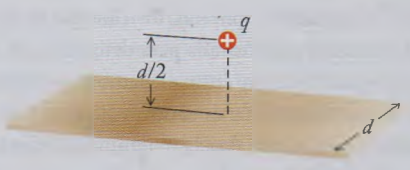



**FIGURA 24.29** Una carga puntual $q$ y una banda cargada.

*a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico que produce esa carga puntual a través de la banda? (Sugerencia: La banda es una de las cuatro caras de un tubo rectangular que rodea la carga puntual.)

*b*) Siga los pasos del problema 15 para determinar el campo eléctrico que la banda produce en el lugar de la carga puntual.

18. Un cubo de 2.0 m por lado, similar al de la figura 24.7, está en una región donde el campo eléctrico se dirige hacia afuera desde dos caras opuestas del cubo, con magnitud uniforme $E_0$ en cada una de esas dos caras. Ningún flujo cruza las otras cuatro caras. ¿Cuánta carga hay dentro del cubo?

19. Una varilla corta y delgada, de 2.5 cm de longitud, tiene carga distribuida uniformemente en su longitud. La varilla es coaxial con, y centrada dentro de una lata cilíndrica sin carga, mucho mayor. El flujo a través del lado curvo de la lata es $+65\ \mathrm{N \cdot m^2/C}$, y el flujo a través del fondo circular es $+45\ \mathrm{N \cdot m^2/C}$. ¿Cuál es el flujo a través de la cara circular superior de la lata? ¿Cuál es el valor de la densidad lineal $\lambda$ de carga en la varilla?

20. Considérese una superficie cilíndrica de Gauss, de radio $a$ y longitud $2z$, con un pequeño dipolo eléctrico en su centro; el momento dipolar **p** está a lo largo del eje del cilindro. De acuerdo con el resultado del problema 12, el flujo a través de la cara circular superior del cilindro es

$$\Phi_E = \frac{p}{2\epsilon_0} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

*a*) ¿Cuál es el flujo a través de la cara circular inferior?

*b*) ¿Cuál es el flujo a través de la superficie curva del cilindro?

*21. Una superficie esférica de Gauss tiene 1.00 m de radio y tiene un pequeño agujero de 10 cm de radio. En el centro de esta superficie esférica se coloca una carga puntual de $2.00 \times 10^{-9}$ C (véase la figura 24.30). ¿Cuál es el flujo que atraviesa la superficie?

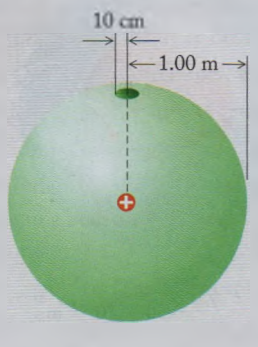



**FIGURA 24.30** Superficie esférica de Gauss con un agujero pequeño.

*22. Una carga puntual $q$ está ubicada en un vértice de una superficie cúbica de Gauss, dentro del cubo (véase la figura 24.31). ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de cada cara del cubo?

**FIGURA 24.31** Carga puntual ubicada dentro del vértice de una superficie cúbica de Gauss.

*23. Defínase el campo gravitacional como la fuerza gravitacional por unidad de masa, y formule una ley de Gauss para la gravedad. Verifique que su ley implique la ley de Newton de la gravitación universal.

*24. El campo eléctrico en una región tiene la siguiente forma, en función de $x$, $y$, $z$:

$$E_x = 5.0x \qquad E_y = 0 \qquad E_z = 0$$

donde $E$ está en newtons por coulomb, y $x$ está en metros. Esto representa un campo eléctrico con dirección $x$ y con magnitud que aumenta en proporción directa a $x$. Demuéstrese que ese campo eléctrico sólo puede existir si la región está llena con alguna densidad de carga eléctrica. Determínese el valor de la densidad necesaria de carga, en función de $x$, $y$, $z$.

**25. Demuéstrese que si el campo eléctrico es uniforme en alguna región, entonces la densidad de carga debe ser cero en esa región. (Sugerencia: Use la ley de Gauss.)

## 24.3 Aplicaciones de la ley de Gauss

26. Un núcleo de uranio es una esfera de $7.4 \times 10^{-15}$ m de radio, con una carga de $92e$ distribuida uniformemente en su volumen. Calcúlese el campo eléctrico producido por esta distribución de carga en $r = 3.0 \times 10^{-15}$ m, $6.0 \times 10^{-15}$ m y $9.0 \times 10^{-15}$ m.

27. Los electrones pueden penetrar en el núcleo, porque el material nuclear no ejerce fuerzas sobre ellos, además de las fuerzas eléctricas. Supóngase que un electrón penetra en un núcleo de plomo. ¿Cuál es la fuerza eléctrica sobre el electrón, cuando está a $3.0 \times 10^{-15}$ m del centro del núcleo? El centro del núcleo es una esfera uniformemente cargada de $7.1 \times 10^{-15}$ m de radio con una carga total de $82e$.

28. En una fisión simétrica, un núcleo de uranio se parte en dos piezas iguales, cada una de las cuales es un núcleo de paladio. El núcleo de paladio es esférico, con $5.9 \times 10^{-15}$ m de radio, y una carga de $46e$ uniformemente distribuida en su volumen. Supóngase que, inmediatamente después de la fisión, los dos núcleos de paladio apenas si se tocan (figura 24.32). ¿Cuál es el valor

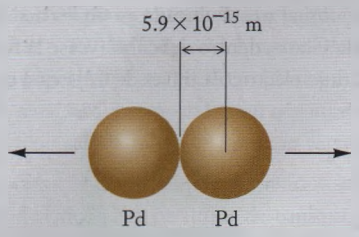



**FIGURA 24.32** Dos núcleos de paladio en contacto. Cada núcleo es una esfera.

del campo eléctrico total en el centro de cada uno? ¿Cuál es la fuerza de repulsión entre ellos? ¿Cuál es la aceleración de cada uno? La masa de un núcleo de paladio es $1.99 \times 10^{-25}$ kg.

29. Un globo esférico de hule tiene una distribución uniforme de carga en su superficie. Demuéstrese que el campo eléctrico que produce esa carga en el interior (vacío) del globo es exactamente cero.

30. El diámetro aproximado de un protón es $1.0 \times 10^{-15}$ m. ¿Cuántos diámetros de distancia hay entre dos protones si la fuerza de Coulomb entre ellos es 1.0 N?

31. En el volumen de una barra cilíndrica de plástico de radio $R$ hay carga uniformemente distribuida. La cantidad de carga por metro de longitud de la barra es $\lambda$. Dedúzcase una fórmula que determine el campo eléctrico a la distancia $r$ del eje de la barra. Supóngase que $r < R$.

32. ¿Cuál es la cantidad máxima de carga eléctrica por unidad de longitud que puede ponerse en un cabello humano, largo y recto, de $8.0 \times 10^{-3}$ cm de diámetro, de manera que el aire que lo rodea no sufra rompimiento eléctrico? El aire presenta rompimiento eléctrico cuando el campo eléctrico es mayor que $3.0 \times 10^{6}$ N/C.

*33. Un cascarón esférico de plástico tiene radio interior $a$ y radio exterior $b$ (véase la figura 24.33). En la región de $a < r < b$ hay carga eléctrica uniformemente distribuida, con una densidad de $\rho$ coulombs por metro cúbico. Determínese el campo eléctrico en las regiones $r \leq a$, $a \leq r \leq b$ y $r \geq b$.

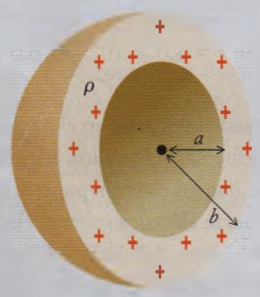



**FIGURA 24.33** Un cascarón esférico con densidad volumétrica uniforme de carga $\rho$.

*34. El tubo de un contador Geiger se compone de un delgado alambre conductor de $1.3 \times 10^{-3}$ cm de radio, estirado a lo largo del eje de una cubierta cilíndrica de 1.3 cm de radio (véase la figura 24.34). El alambre y el cilindro tienen cargas de $7.2 \times 10^{-10}$ C, iguales y opuestas, distribuidas en su longitud de 9.0 cm. Dedúzcase una fórmula para determinar el campo eléctrico en el espacio que hay entre el alambre y el cilindro; supóngase que el campo eléctrico es el de un alambre y un cilindro infinitamente largos. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en la superficie del alambre?

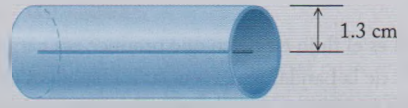



**FIGURA 24.34** Un alambre delgado estirado a lo largo del eje de un cascarón cilíndrico conductor.

*35. Un cascarón esférico grueso, con radio interior $a$ y radio exterior $b$, tiene una carga $Q$ distribuida uniformemente en su volumen (véase la figura 24.35). Determínese el campo eléctrico en las regiones $r \leq a$, $a \leq r \leq b$ y $r \geq b$.

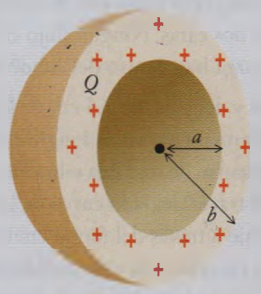



**FIGURA 24.35** Un cascarón esférico grueso con carga total $Q$ uniformemente distribuida en su volumen.

*36. De acuerdo con un modelo (tosco), el neutrón se compone de un núcleo interior de carga positiva rodeado por una cáscara de carga negativa. Supóngase que la magnitud de la crga positiva es $+e$, y está uniformemente distribuida en una esfera de $0.50 \times 10^{-15}$ m de radio, y que la carga negativa tiene magnitud $-e$, y que está uniformemente distribuida en un cascarón concéntrico, de radio interior $0.50 \times 10^{-15}$ m y radio exterior $1.0 \times 10^{-15}$ m (véase la figura 24.36). Calcúlese la magnitud y la dirección del campo eléctrico a $1.0 \times 10^{-15}$, $0.75 \times 10^{-15}$, $0.50 \times 10^{-15}$ y $0.25 \times 10^{-15}$ m del centro.

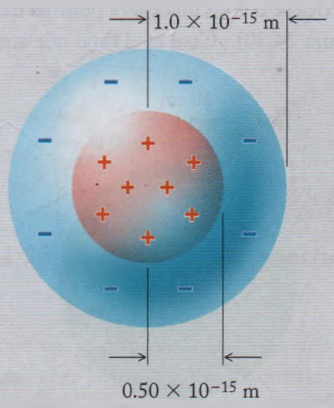



**FIGURA 24.36** Distribución hipotética de cargas dentro de un neutrón.

*37. De acuerdo con un modelo antiguo (y erróneo) de un átomo, debido a J. J. Thomson, el átomo se compone de una nube de carga positiva dentro de la cual hay electrones, como pasas en un budín. Se supone que los electrones emiten luz al vibrar respecto a sus posiciones de equilibrio en esa nube. Supóngase que en el caso del átomo de hidrógeno, la nube positiva es una esfera de radio $R = 0.050$ nm con una carga $e$ distribuida uniformemente en el volumen. El electrón (un punto) se mantiene en el centro de esa distribución de carga por la atracción electrostática.

*a*) Demuéstrese que la fuerza de restitución sobre el electrón es $e^2r/(4\pi\epsilon_0R^3)$, cuando el electrón está a la distancia $r$ del centro ($r \leq R$).

*b*) ¿Cuál es la frecuencia de las oscilaciones pequeñas del electrón cuando se mueve a lo largo de un diámetro? Cítese un resultado *numérico*.

*38. De acuerdo con el modelo de Thomson (véase también el problema 37), el átomo de helio se compone de una nube esférica uniforme de carga positiva, dentro de la cual hay dos electrones. Supóngase que la nube positiva es una esfera de $5.0 \times 10^{-11}$ m, con una carga $2e$ uniformemente distribuida en el volumen. Los dos electrones se colocan simétricamente con respecto al centro (véase la figura 24.37). ¿Cuál es la separación de equilibrio de los electrones?

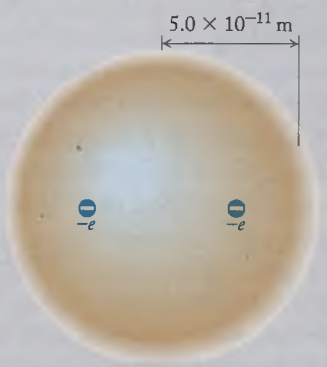



**FIGURA 24.37** Modelo de Thomson del átomo de helio.

*39. Si una distribución volumétrica de carga varía continuamente en función de la posición, la sencilla relación $Q = \rho V$ debe reemplazarse por la integral $Q = \int \rho dV$. Para la simetría esférica, $dV = 4\pi r^2 dr$ (volumen de un cascarón esférico de espesor $dr$ y área $4\pi r^2$). Considérese una esfera de radio $R$ y carga total $Q$, con una **densidad volumétrica no uniforme de carga** $\rho(r) = C/r$, siendo $C$ una constante que se debe determinar.

*a*) A partir de $Q = \int \rho dV$, determínese el valor de la constante $C$.

*b*) Con la ley de Gauss determine el campo eléctrico para $r \leq R$.

*c*) ¿Cuál es el campo eléctrico para $r \geq R$?

*40. Un cascarón esférico aislante, grueso, de radio interior $a$ y radio exterior $b$, tiene una densidad de carga volumétrica no uniforme, definida por $\rho(r) = C/r^3$, siendo $C$ una constante conocida.

*a*) ¿Cuál es la carga total $Q$ en el cascarón? (Sugerencia: Véase el problema 39.)

*b*) Determine el valor del campo eléctrico para $r \leq a$, $a \leq r \leq b$ y $r \geq b$.

*41. Una esfera aislante maciza tiene una distribución de carga con simetría esférica: la densidad de carga $\rho$ coulombs por metro cúbico, no uniforme, definida por la fórmula $\rho = kr^n$, donde $k$ es una constante y $n > -3$.

*a*) ¿Cuál es la cantidad de carga $Q(r)$ dentro de una esfera de radio $r$? (Sugerencia: Véase el problema 39.)

*b*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en función de $r$?

*c*) ¿Para qué valor de $n$ es constante la magnitud del campo eléctrico?

*d*) ¿Por qué es necesario suponer que $n > -3$?

*42. Si una distribución de carga varía continuamente en función de la posición, entonces se debe sustituir la sencilla relación $Q = \rho V$ por la integral $Q = \int \rho dV$. Para una simetría cilíndrica, $dV = 2\pi rL\, dr$ (volumen de una cáscara cilíndrica de radio $r$, longitud $L$ y espesor $dr$). Considérese un cilindro macizo de radio $R$ y una densidad volumétrica no uniforme de carga $\rho(r) = B/r$, siendo $B$ una constante conocida.

*a*) ¿Cuál es la cantidad de carga $Q(r)$ dentro de un cilindro de radio $r \leq R$ y longitud $L$?

*b*) ¿Cuál es el campo eléctrico para $r \leq R$?

*43. Una losa aislante grande de espesor $d$ (parecida a la del ejemplo 10) tiene ahora una densidad volumétrica no uniforme de carga $\rho = \rho(x)$, donde $x = 0$ está en el centro de la losa. Como $\rho$ varía con la posición, debe sustituirse la sencilla ecuación $Q = \rho V$ por la integral $Q = \int \rho dV$. Para el volumen dentro de la superficie de Gauss menor de la figura 24.17, $dV = A\, dx$ (volumen de un disco circular con área $A$ y espesor $dx$). Si la distribución volumétrica de carga está definida por $\rho = Cx^2$, siendo $C$ una constante conocida, determínese la magnitud del campo eléctrico para $|x| \leq d/2$ y para $|x| \geq d/2$.

**44. La carga eléctrica del protón no está concentrada en un punto, sino distribuida en un volumen. De acuerdo con investigaciones experimentales en el acelerador lineal de Stanford, la distribución de carga en el protón se puede describir, aproximadamente, por una densidad volumétrica no uniforme que es una función exponencial de la distancia radial:

$$\rho = \frac{e}{8\pi b^3} \exp\left(-\frac{r}{b}\right)$$

donde $e$ es la carga elemental, y $b$ es una constante; $b = 0.20 \times 10^{-15}$ m. Calcúlese el campo eléctrico en función de la distancia radial. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico cuando $r = 1.0 \times 10^{-15}$ m? [Sugerencia: Véase el problema 39. También, será de utilidad la siguiente integral: $\int x^2e^{-x}\, dx = -x^2e^{-x} - 2e^{-x}(x + 1)$, siendo $e$ la base de los logaritmos naturales.]

**45. Cuando una carga puntual $q$ que se mueve a gran velocidad pasa cerca de otra carga puntual estacionaria $q'$, el efecto principal de las fuerzas eléctricas es comunicar un impulso transversal a cada una de las cargas. La figura 24.38 muestra a la carga $q$ moviéndose a una velocidad (casi) constante $v$, a lo largo del eje $x$, en una línea casi recta, y muestra la carga $q'$ inmó-

vil a la distancia $R$, debajo del origen. El impulso transversal sobre $q$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_y\, dt = \frac{q}{v}\int_{-\infty}^{\infty} E_y\, dx$$

Se evalúa la integral $\int E_y\, dx$ mediante la ley de Gauss, y se demuestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_y\, dt = \frac{q}{v}\frac{q'}{2\pi\epsilon_0 R}$$

(Sugerencia: Examínese $2\pi R \int E_y\, dx$; demuéstrese que es el flujo que produce $q'$ a través de la superficie cilíndrica infinita indicada en la figura 24.38.)

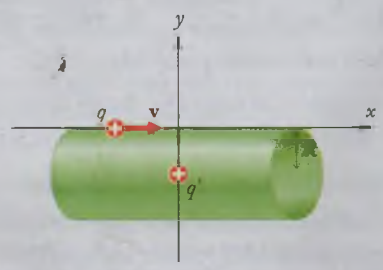



**FIGURA 24.38** La carga $q$ se mueve a lo largo del eje $x$. La carga $q'$ está a una distancia $R$ debajo del eje $x$. El cilindro, que se prolonga al infinito, es la superficie de Gauss.

*46. La fórmula deducida en el problema 45 expresa la cantidad de movimiento que adquiere una partícula a alta velocidad, al pasar frente a una partícula cargada estacionaria.

*a*) Calcúlese la cantidad de movimiento transversal que adquiere un electrón que viaja a $4.0 \times 10^7$ m/s al pasar frente a un electrón estacionario, a la distancia de $0.60 \times 10^{-10}$ m.

*b*) ¿Qué velocidad transversal corresponde a esa cantidad de movimiento transversal?

*c*) ¿Cuál será la velocidad de retroceso del electrón estacionario (si tiene libertad de movimiento)?

## 24.4 Superposición de campos eléctricos

*47. Distribuida uniformemente en el volumen de una esfera maciza de radio $R$, está la carga positiva $Q$. Supóngase que se saca una cavidad esférica de radio $R/2$ de la esfera maciza, y que el centro del hueco está a una distancia $R/2$ del centro de la esfera maciza original (véase la figura 24.39). El material extraído y su carga se desechan. ¿Cuál es el nuevo campo eléctrico que produce la esfera con la cavidad, en el punto $P$ a una distancia $r$ del centro original? Suponga que $r > R$.

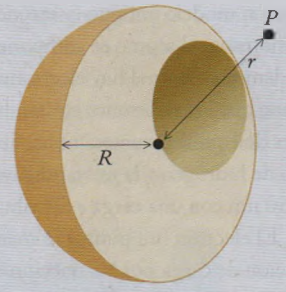



**FIGURA 24.39** Esfera con un hueco esférico.

*48. La figura 24.19*a* muestra un cilindro infinito con una densidad uniforme de carga volumétrica $\rho$ y radio $R$. El cilindro tiene una cavidad esférica vacía, de radio $a < R$, centrado en su eje. Para puntos que estén a una distancia radial $r$ del centro de la cavidad esférica, a lo largo de una línea perpendicular al eje del cilindro, determínese la magnitud y la dirección del campo eléctrico para *a*) $r \leq a$, *b*) $a \leq r \leq R$; *c*) $r \geq R$.

*49. Considérese una losa infinita de espesor $d$ paralela al plano $y$-$z$, centrada en $x = 0$, similar a la de la figura 24.17. Sin embargo, esta losa tiene una cavidad esférica vacía de radio $d/2$, con centro en el origen, que apenas toca las caras de la losa; además de esta cavidad, la losa tiene siempre una densidad volumétrica uniforme de carga $\rho$. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo eléctrico en $\mathbf{r} = \frac{1}{4}d\mathbf{i}$? ¿En $\mathbf{r} = 2d\mathbf{i}$? ¿En $\mathbf{r} = \frac{1}{2}d\mathbf{i} + d\mathbf{j}$?

*50. Un cilindro largo, de radio $R$, tiene una densidad uniforme de carga $\rho$ distribuida en su volumen. Se ha perforado un agujero cilíndrico de radio $R'$ paralelo al eje del cilindro, a lo largo de toda su longitud, y se ha eliminado la carga en ese agujero. El eje del agujero está a una distancia $h > R'$ del eje del cilindro (véase la figura 24.40). Determínese el campo eléctrico en función de la distancia radial $r$ en la línea radial llena que muestra la figura 24.40. Examínense por separado los casos $r \leq h - R'$, $h - R' \leq r \leq h + R'$, $h + R' \leq r \leq R$ y $r \geq R$.

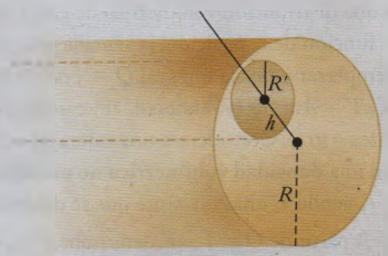



**FIGURA 24.40** Cilindro con una cavidad cilíndrica.

**51. Una carga $q$ está uniformemente distribuida en el volumen de una esfera maciza de radio $R$. De esta esfera maciza se corta una cavidad esférica (véase la figura 24.41), y se desechan el material y su carga. Demuéstrese que el campo eléctrico en la

cavidad será entonces uniforme, de magnitud $(1/4\pi\epsilon_0)Qd/R^3$, donde $d$ es la distancia entre los centros de las esferas (véase la figura 24.41). Haga un esquema de las líneas de campo eléctrico en la cavidad.

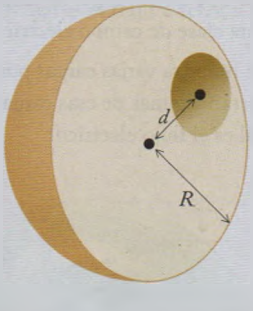



**FIGURA 24.41** Esfera con una cavidad esférica.

## 24.5 Conductores y campos eléctricos

52. En un día claro, el campo eléctrico atmosférico de la Tierra, cerca del suelo, tiene una magnitud de 100 N/C y apunta verticalmente hacia abajo. Debajo del suelo, el campo eléctrico es cero, porque el terreno es conductor. Considérese una caja matemática de 1.0 m × 1.0 m × 1.0 m, una de sus mitades abajo y la otra arriba del suelo. ¿Cuál es el flujo eléctrico que atraviesa los lados de esa caja? ¿Cuál es la carga que encierra la caja?

53. Supóngase que se coloca una esfera pequeña que tiene una carga de $1.0 \times 10^{-6}$ C, en el centro de una caja de seguridad, y que se cierra la puerta. La caja no está cargada, y es de acero macizo; sus dimensiones interiores son 0.30 m × 0.30 m × 0.30 m, y las exteriores son 0.40 m × 0.40 m × 0.40 m. ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una superficie cúbica que mide 0.20 m × 0.20 m × 0.20 m al centro de la esfera? ¿De una superficie cúbica que mide 0.35 m × 0.35 × 0.35 m? ¿Y de una superficie cúbica que mida 0.50 m × 0.50 m × 0.50 m?

54. Se coloca una carga en una pequeña esfera metálica que está rodeada de aire. Si el radio de la esfera es de 0.50 cm, ¿cuánta carga se debe agregar en la esfera antes de que el aire cercano a la esfera experimente un rompimiento eléctrico? La fuerza del campo eléctrico crítica que conduce al rompimiento en el aire es de $3.0 \times 10^6$ N/C.

55. La superficie de un tubo de cobre largo, cilíndrico, tiene una carga de $\lambda$ coulombs por metro (véase la figura 24.42). ¿Cuál es el campo eléctrico fuera del tubo? ¿Dentro del tubo?

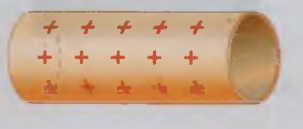


**FIGURA 24.42** Un tubo largo de cobre con carga positiva en su superficie.

56. Una esfera maciza de cobre de 3.0 cm de radio tiene una carga de $1.0 \times 10^{-6}$ C. Esta esfera se coloca en posición concéntrica dentro de un cascarón esférico delgado de cobre, de 15 cm de radio, que tiene una carga de $3.0 \times 10^{-6}$ C. Dedúzcase una ecuación para determinar el campo eléctrico en el espacio que hay entre la esfera y el cascarón. Dedúzcase una fórmula para determinar el campo eléctrico fuera del cascarón. Trácese la gráfica de esos campos eléctricos en función del radio.

57. Un cascarón esférico grueso, de metal macizo, tiene radio interior $a$ y radio exterior $b$; al principio no tiene carga. En el centro del cascarón se coloca una carga puntual $q$. Determínese el campo eléctrico en las regiones $r < a$, $a < r < b$ y $r > b$. Determínese las densidades superficiales de carga inducidas en $r = a$ y $r = b$.

58. Considérese una losa conductora gruesa, infinita y totalmente aislada. Una cara de la losa tiene una densidad de carga superficial de $+\sigma$.

    *a*) ¿Cuál es el campo eléctrico en el interior de la losa?

    *b*) ¿Cuál es la densidad de carga superficial en la otra cara de la losa?

    *c*) ¿Cuál es el campo eléctrico en el exterior de la losa?

59. En días de buen tiempo, el campo eléctrico atmosférico de la Tierra es, aproximadamente, 100 N/C; este campo se dirige verticalmente hacia abajo (compárese con el problema 4 del capítulo 23). ¿Cuál es la densidad de carga superficial en el terreno? Considérese que el terreno es un conductor plano.

60. Se desea generar un campo eléctrico uniforme de $2.0 \times 10^5$ N/C en el espacio entre dos placas metálicas planas paralelas colocadas frente a frente. Las placas miden 0.30 cm × 0.30 cm. ¿Cuánta carga eléctrica se debe poner en cada placa? Supóngase que el espacio entre las placas es pequeño, por lo que la distribución de cargas y el campo eléctrico son aproximadamente uniformes, como los de las placas infinitas. Supóngase que las placas tienen cargas opuestas de igual magnitud.

61. Una carga puntual $Q_1$ está en el centro de dos cascarones esféricos conductores. El cascarón mayor tiene una carga total $Q_2$; el cascarón menor tiene una carga total de cero.

    *a*) ¿Cuál es la carga en la superficie interna del cascarón menor? ¿En la superficie externa?

    *b*) ¿Cuál es el campo eléctrico a una distancia $r$ de la carga puntual, estando $r$ entre los dos cascarones?

    *c*) ¿Cuál es la carga en la superficie interior del cascarón mayor? ¿Y en su superficie externa?

    *d*) ¿Cuál es el campo eléctrico en el exterior de los dos cascarones a una distancia $r$ de la carga puntual?

*62. Una esfera maciza de dieléctrico tiene radio $R_1$ y una densidad volumétrica uniforme de carga $\rho$. Se coloca concéntrica dentro de un cascarón metálico, de radio interior $R_2$ y radio exterior $R_3$. El cascarón tiene una carga total $Q_0$. Determínese la magnitud del campo eléctrico para *a*) $r \leq R_1$; *b*) $R_1 \leq r < R_2$; *c*) $R_2 < r < R_3$, y *d*) $r > R_3$.

# PROBLEMAS DE REPASO

63. Una carga puntual $q$ se coloca muy cerca (casi tocando) la base de una superficie de Gauss, cilíndrica e infinitamente larga (véase la figura 24.43). ¿Cuál es el flujo que produce la carga puntual a través de la base? ¿Cuál es el flujo que produce la carga puntual a través de la superficie lateral curva del cilindro?

**FIGURA 24.43** Una carga puntual $q$ dentro de una superficie cilíndrica de Gauss.

64. Una carga puntual de $2.0 \times 10^{-8}$ C está en el centro de una superficie de Gauss en forma de un cubo de 8.0 cm de lado. ¿Cuál es el valor promedio de $E_{\perp}$ en una cara del cubo?

65. Dos superficies planas muy grandes se cruzan a 90° y forman un piso y una pared (véase la figura 24.44).
    *a)* Si se coloca una carga puntual $q$ por fuera de la arista formada por las superficies que se cruzan ¿cuál es el flujo eléctrico que atraviesa las superficies combinadas?
    *b)* Si la carga puntual $q$ se coloca en el interior de la arista formada por las superficies que se cruzan ¿cuál es el flujo eléctrico a través de las superficies combinadas?

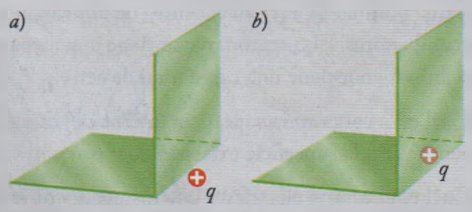



**FIGURA 24.44** *a)* Carga puntual ubicada por fuera de la arista formada por las superficies que se cruzan. *b)* Carga puntual ubicada en el interior de la arista.

66. Una superficie cúbica de Gauss tiene 5.0 cm por lado. No se conoce la carga eléctrica ni el campo eléctrico dentro del cubo, pero sí el campo eléctrico en la superficie: en la tapa del cubo, la magnitud del campo eléctrico es $5.0 \times 10^5$ N/C, con dirección perpendicular a la cara y saliendo del cubo. En el fondo del cubo, la magnitud del campo eléctrico es $2.0 \times 10^5$ N/C dirigida perpendicularmente a la cara y entrando al cubo; en todas las demás caras, el campo eléctrico es tangencial a la superficie del cubo.
    *a)* ¿Cuánta carga eléctrica hay dentro del cubo?
    *b)* ¿Puede decir qué distribución de carga (interna y externa) generaría esta clase de campo eléctrico?

67. La figura 24.45 muestra varias cargas puntuales y varias superficies que encierran algunas de esas cargas. Para cada una de las superficies ¿cuál es el flujo eléctrico?

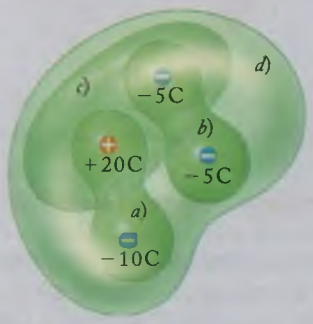



**FIGURA 24.45** Varias superficies de Gauss *a)*-*d)*.

68. En una copiadora xerográfica, al copiar se deposita carga eléctrica en la hoja de papel, mediante una descarga de corona producida por un alambre delgado que tiene una concentración de cargas (en algunas copiadoras se podrá ver este alambre de corona, si se abre la tapa; véase la figura 24.46). El alambre tiene un radio de $2.0 \times 10^{-5}$ m. Para producir la descarga de corona se requiere un campo eléctrico de $3.0 \times 10^6$ N/C cerca de la superficie del alambre. ¿Qué cantidad $\lambda$ de carga, por unidad de longitud, debe colocarse en el alambre para alcanzar este campo eléctrico?

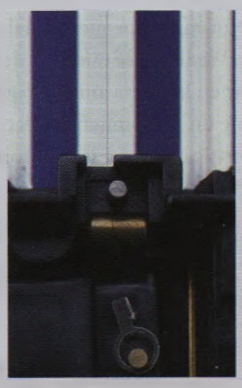


**FIGURA 24.46** Alambre de corona en una copiadora xerográfica.

69. Un cilindro muy largo, de radio $R$, tiene carga positiva distribuida uniformemente en su volumen. La cantidad de carga es $\lambda$ coulombs por metro de longitud del cilindro. De este cilindro se saca una cavidad esférica de radio $R' \leq R$, centrada en el eje del cilindro. La carga del material eliminado también se elimina. Determínese el campo eléctrico en función de la distancia al centro de la esfera, a lo largo del eje del cilindro.

70. Una varilla larga y delgada tiene una carga de $\lambda$ coulombs por metro. Hay una superficie cuadrada de dimensiones $d \times d$; esta superficie y la varilla están en el mismo plano. El lado cercano de la superficie cuadrada está a la distancia $r$ de la varilla (véase la figura 24.47). ¿Cuál es el flujo eléctrico que atraviesa el cuadrado?

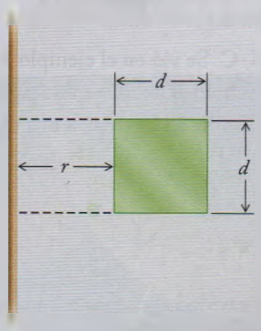



**FIGURA 24.47** Varilla cargada y superficie cuadrada.

71. Una esfera de radio $R$ y con densidad uniforme de carga volumétrica $\rho$ permanece estacionaria (levita) cuando se coloca sobre una hoja infinita de papel que tiene una densidad superficial de carga $\sigma$. ¿Cuál es la masa de la esfera?

72. Dos láminas paralelas e infinitas tienen densidades superficiales de carga uniformes y opuestas, de $\pm\sigma$. ¿Cuál es la fuerza eléctrica que ejerce una lámina sobre una porción de área $A$ de la otra lámina?

73. Dos varillas paralelas tienen el mismo radio $R$ y densidades opuestas de carga lineal, $\pm\lambda$. Los centros de las varillas están separados por una distancia $4R$. ¿Cuál es el campo eléctrico a la mitad entre las varillas? ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en un punto equidistante de las dos varillas, a una distancia $R$ de la línea paralela a las varillas y a la mitad de la distancia entre ellas?

74. La intensidad del campo eléctrico atmosférico disminuye con la altitud. Esta disminución se debe a la presencia de iones positivos en la atmósfera. Supóngase que en el nivel del suelo, el campo eléctrico atmosférico tiene 130 N/C de magnitud, y su dirección es hacia abajo. Si los iones positivos aportan una densidad volumétrica de carga de $1.0 \times 10^{-14}$ C/m$^3$ en el aire, ¿cuál es la razón de disminución del campo eléctrico atmosférico en función de la altura? ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico atmosférico a 1 000 m de altitud?

75. Un cascarón cilíndrico grueso de radio interior $a$ y radio exterior $b$ tiene una carga de $\lambda$ coulombs por unidad de longitud, uniformemente distribuida en su volumen. A lo largo del eje del cascarón se coloca un alambre delgado de carga $-\lambda$ coulombs por unidad de longitud, estirado a lo largo del eje del cascarón (véase la figura 24.48). Determínese el campo eléctrico en las regiones $r \leq a$, $a \leq r \leq b$ y $r \geq b$.

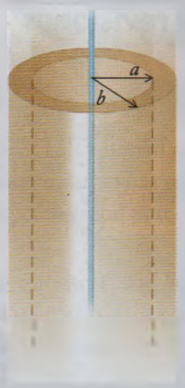



**FIGURA 24.48** Un cascarón cilíndrico grueso con una distribución de carga en su volumen, y un alambre cargado a lo largo de su eje.

76. Se tienen dos placas metálicas paralelas grandes, con distribuciones de cargas uniformes y opuestas, como en la figura 24.49*a*. Supóngase que la magnitud de la densidad de carga en cada placa es $2.0 \times 10^{-5}$ C/m$^2$. La placa superior es positiva, y la inferior es negativa.

*a*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en la región entre las placas?

*b*) Ahora se inserta una placa metálica neutra, grande, entre las dos placas cargadas, como en la figura 24.49*b*. Supóngase que esa placa tiene 1.0 cm de espesor. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico dentro de esa placa metálica? ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el espacio restante, arriba y abajo de la placa gruesa?

*c*) ¿Cuál es la densidad de carga en la superficie superior de la placa gruesa? ¿Y en la superficie inferior?

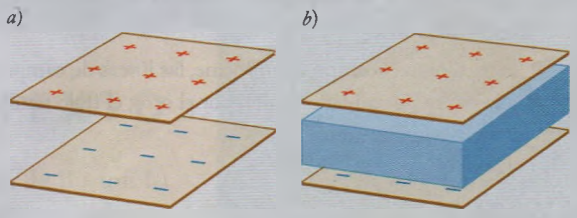



**FIGURA 24.49** *a*) Placas paralelas con cargas opuestas. *b*) Otra placa insertada entre ellas.

*77. La partícula tau tiene una carga fundamental negativa similar a la del electrón, pero su masa es mucho mayor, es $3.18 \times 10^{-27}$ kg, unas 3 490 veces la masa del electrón. El material nuclear es transparente a la tau, por lo que puede tener una órbita dentro de un núcleo, bajo la influencia de la atracción eléctrica de la carga nuclear. Supóngase que una tau tiene una órbita circular de $2.9 \times 10^{-15}$ m de radio, dentro de un núcleo de uranio. Considérese el núcleo de uranio como una esfera de radio $7.4 \times 10^{-15}$ m, con una carga $92e$ uniformemente distribuida en su volumen. Calcúlese la rapidez, la energía cinética, la cantidad de movimiento angular y la frecuencia del movimiento orbital de la tau.

# Respuestas a las revisiones

## Revisión 24.1

1. Si la superficie fuera horizontal, no la cruzarían líneas de campo, por lo que el flujo sería cero (menor); si la superficie fuera vertical, la cruzarían más líneas de campo, por lo que el flujo sería mayor.
2. No cambia en ningún caso; la misma cantidad de líneas de campo cruzarían cualquier superficie cerrada en torno a la carga. Como se indicó en el comentario del ejemplo 2, el flujo neto sólo depende de la carga encerrada por la superficie. En la siguiente sección se explorará formalmente esta relación, entre el flujo a través de una superficie y la carga encerrada; es la *ley de Gauss*.
3. (C) Cero. Porque todas las líneas de campo que entran a la superficie también salen de ella; el flujo neto a través de la superficie es cero.

## Revisión 24.2

1. La ley de Gauss indica que $\Phi_E = Q_{\text{interna}}/\epsilon_0$, por lo que flujo cero equivale a cero carga total encerrada. Si la superficie tiene un agujero, no se pueden sacar conclusiones: no se sabe el flujo a través de una superficie cerrada, y "la carga interna" no está bien definida para esa superficie.
2. Como las dos cargas son de igual magnitud, pero de signo contrario, la carga neta dentro de la superficie es cero, por lo que el flujo neto a través de la superficie es cero.
3. En el ejemplo 3, el cálculo del flujo neto que atraviesa el cubo resultó $\Phi_E = 40\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$, por lo que la ley de Gauss indica que la carga dentro de ese cubo es
$$Q_{\text{interna}} = \epsilon_0\Phi_E = (8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(40\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}) = 0.35\ \text{n}C$$
4. (E) Cero. Como el campo es uniforme, las líneas de campo entran a la esfera por un lado y salen por el otro; el flujo neto a través de la esfera es cero.

## Revisión 24.3

1. No. Aunque la ley de Gauss sigue siendo válida, no hay superficie a través de la cual se pueda calcular con facilidad el flujo eléctrico. Para calcular el campo eléctrico de cuatro cargas puntuales se debería tomar la suma vectorial de los cuatro campos de Coulomb (cargas puntuales).
2. Como en el ejemplo 7, $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 r) \propto \lambda/r$. Entonces, para valores iguales de $\lambda$, el alambre más delgado producirá un campo 10 veces mayor en su superficie.
3. Como en el ejemplo 5 y la figura 24.11, el campo en el centro es cero y es máximo en la superficie de la esfera [donde tiene el valor $E = Q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$].
4. Como en la pregunta anterior, el campo en el centro es cero (cero carga encerrada para $r = 0$). En la superficie, sólo importa la carga total encerrada (y no cómo está distribuida radialmente), por lo que de nuevo el campo vale $E = Q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$. Sin embargo, en este caso no se sabe dónde está el valor máximo de $E$; depende de la distribución radial y podría estar en cualquier lugar de la región $0 < r \leq R$.
5. (B) $5.0 \times 10^4$ N/C. Se vio en el ejemplo 7, y en el capítulo 23, que el campo eléctrico $E$ debido a una distribución lineal de carga varía en función de $1/r$. Así, a una distancia doble el campo es la mitad.

## Revisión 24.4

1. Sí. Dentro de la cavidad el campo es igual que en la figura 24.19; fuera, hay una contribución adicional, con simetría esférica, de la densidad superficial de carga.
2. No. El campo debido a un cubo uniforme de carga no puede calcularse con facilidad a partir de una de las aplicaciones de la ley de Gauss con alta simetría (esférica, cilíndrica o plana).
3. (B) $\sigma/2\epsilon_0$; $3\sigma/2\epsilon_0$. La contribución al campo debida a la lámina, con densidad de carga $\sigma$, es $\sigma/2\epsilon_0$; la debida a la lámina 2 es $\sigma/\epsilon_0$. Como ambas densidades de carga son positivas, cada contribución al campo se aleja de su lámina respectiva. Entonces, entre las dos láminas esas contribuciones se oponen, y resulta un campo de magnitud $\sigma/\epsilon_0 - \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/2\epsilon_0$, y fuera de las láminas las dos contribuciones son paralelas y producen un campo neto $\sigma/2\epsilon_0 + \sigma/\epsilon_0 = 3\sigma/2\epsilon_0$.

## Revisión 24.5

1. No. Es posible en un aislante, pero no en un conductor cuando está en equilibrio electrostático.
2. Sí. Toda línea de campo que cruce la superficie de cobre debe doblarse para llegar a la superficie en ángulo recto.
3. Como se vio arriba, para determinada densidad de carga la placa metálica produce dos veces el campo eléctrico. Entonces, para la mitad de densidad de carga en cada cara de la placa, los campos eléctricos debidos a la hoja de papel y a la placa de aluminio son iguales. Desde lejos, la división de la densidad de carga no importa; la placa se comporta como una sola lámina de carga. La división de la densidad de carga en dos partes asegura que el campo eléctrico dentro del metal sea cero.
4. (D) $-Q$; $Q$. La carga puntual $Q$ induce una carga opuesta $-Q$ en la superficie interna del conductor; eso asegura que $\mathbf{E} = 0$ dentro del cascarón conductor. Como en total el cascarón no tiene carga, la carga $-Q$ en la superficie interior implica que hay una carga $Q$ en su superficie exterior.